وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveoTamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

اعداد مختلط

در ابتدای پیدایش اعداد انسانهای اولیه فهمیدند نیاز به شمارش دارند ← اعداد طبیعی ابداع شد! بعد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم تعریف کردند.

اما $x+2=0$ جواب نداشت، ← اعداد حسابی ابداع شد برای حل معادلاتی مانند $x+3=1$ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ابداع شد، اما در $2x+3$ جواب نداشت، اعداد $\mathbb{Q}$ گویا خلق شد، باز هم معادله $x^2=2$ جواب نداشت که اعداد $\mathbb{R}$ حقیقی ابداع شد، اما در اعداد حقیقی هم معادله $x^2=-1$ جواب ندارد! باید مجموعه بزرگتری بنام اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تعریف شود که در آن $x^2=-1$ جوابی داشته باشد یعنی $i^2=-1$. حال باید بگوییم عناصر $\mathbb{C}$ به چه شکلی اند؟ این اعداد بصورت $a+bi$ نشان داده می‌شوند، a و b اعداد حقیقی اند.

مثال: $4i$ ، $-3+4i$ ، $3+2i$ ، $1-2i$ ، 4 ، $-i$ ← در حالت کلی با $z=x+yi$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$Re(z)=x \quad , \quad Im(z)=y$$

Real ← x ، imaginary ← y

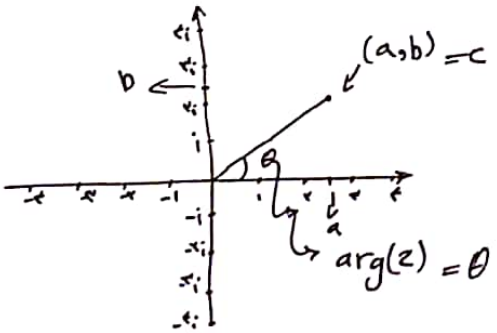
مثال ← $4i=0+(4)i$

$Re(-2i)=0$ ، $Im(-2i)=-(2)$

نمایش اعداد مختلط

اعداد حقیقی را با یک خط نشان می‌دهند، چون $i\notin\mathbb{R}$، باید خارج از $\mathbb{R}$ رفت، چیزی از آنها کم نشده است، پس هر جا حال کنیم می‌رویم، حال بهترین جا بالای صفر! با فاصله‌ی یک واحد در نظر می‌گیریم، مختصات دکارتی داریم ← اعداد مختلط را هم

$z=x+yi$ را می‌توان بصورت (x,y) در نظر گرفت.



فرض کنید ← $a+bi=(a,b)$ یک عدد مختلط باشد. فاصله‌ی این نقطه تا مبدأ را در نظر بگیرید: $\sqrt{a^2+b^2}$ به فاصله اندازه طول می‌گویند.

و با این فاصله اندازه طول می‌گوییم و با $|z|$ نشان می‌دهند ← $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ (اندازه)

زاویه‌ی عدد مختلط ← $z=a+bi$ را شناسه‌ی z را زاویه z می‌گوییم و با θ یا $\arg(z)$ نشان می‌دهیم. (آرگومان!)

نکته: از این زاویه بی‌نهایت 2π و π باز، زاویه اصلی می‌گوییم و با $Arg(z)$ نشان می‌دهند

اگر گفتیم خودش فرعی و با $\arg(z)$ نشان می‌دهند ← $\arg(z)$

① مثال: فرض کنید $z=-1-i$، بدست آورید.

الف) اندازه‌ی z ← $a=-1$، $b=-1$ ← $z=\sqrt{a^2+b^2}$ ← $\sqrt{2}=|z|$

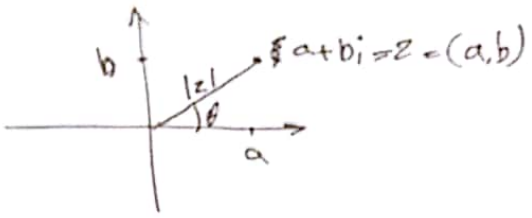
ب) ← $\tan\theta$

جواب (ب): اصلی ← $Arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)\rightarrow\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ ✓

فرعی ← $\arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)\rightarrow\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ ← $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ✓

Scanned by CamScanner

نکته: توجه کنید هر عدد مختلط $z=a+bi$ را می‌توان در صفحه‌ی مختصات به شکل زیر نشان داد.



همچنین می‌توان به شکل دیگری نیز به این نگاه کرد.

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z|\cos\theta$; $z=a+bi \rightsquigarrow |z|\cos\theta + |z|\sin\theta\, i$

$\sin\theta = \frac{b}{|z|} \rightsquigarrow b = |z|\sin\theta$; $\hookleftarrow |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

به این نمایش، نمایش قطبی z می‌گوییم.

مثال:

$|z| = \sqrt{1+1} \rightsquigarrow \sqrt{2}$

$Arg\cos = \tan^{-1}\frac{1}{1} \rightarrow \tan^{-1}1 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ✓ $\boxed{z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ ✓

مثال:

$z=3-4i$

$|z| = \sqrt{9+16} \rightsquigarrow \boxed{|z|=5}$ $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$

$z = 5\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

مزدوج عدد مختلط اگر $z=a+bi$ یک عدد مختلط باشد، به $\bar{z}=a-bi$ مزدوج z می‌گوییم.

مثال: $z=1-i$ مزدوج $\bar{z}=1+i$

جمع و تفریق و ضرب و تقسیم

$z=a+bi$, $w=c+di$ $\rightsquigarrow z+w=(a+c)+(b+d)i$ (جمع)

$\rightsquigarrow z-w=(a-c)+(b-d)i$ (تفریق)

مثال:

$z=1+4i$, $w=-\sqrt{2}+2i$

$z+w = 1-\sqrt{2}+6i$

$z-w = 1+\sqrt{2}+2i$

Scanned by CamScanner

فرض کنید $w=x+yi$ ، $z=a+bi$ دو عدد مختلط باشند. ضرب zw را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$zw=(a+bi)(x+yi) \Rightarrow ax+ayi+bxi+byi^2$$

$$\Rightarrow ax+ayi+bxi-by=\boxed{(ax-by)+(ay+bx)i}$$

حفظ شود! (مهم)

مثال)

$$\left.\begin{matrix}(۳-i)(۲+۴i)\\ a\ \ b\ \ x\ \ y\\ (ax-by)+(ay+bx)i\end{matrix}\right\} \rightarrow (۶+۴)+(۱۲-۲)i=\boxed{۱۰+۱۰i}$$

مثال)

$$\left.\begin{matrix}(-i)(۲-i)\\ (ax-by)+(ay+bx)i\end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{-۱-۲i}$$

وارون یک عدد مختلط اگر $z=x+yi$ یک عدد مختلط باشد به عدد مختلط $w=a+bi$ وارون z می گوییم و با نماد z^{-1} نشان می دهیم هرگاه:

$$\boxed{zw=wz=۱+۰i=۱}$$

مثال= فرض کنید داریم:

$$\left.\begin{matrix}z=۳+i\\ w=\frac{۳}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}i\end{matrix}\right| \ zw=?$$

حل $\Rightarrow zw=(۳+i)\left(\frac{۳}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}i\right)=۱+۰i=۱$ ✓

فرمول وارون یک عدد مختلط اگر $z=x+yi$ یک عدد مختلط باشد، آنگاه

$$w=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

برابر وارون z خواهد بود با در واقع داریم:

$$w=\frac{۱}{x^2+y^2}(x-yi)=\frac{۱}{|z|^2}\bar{z}$$

مثال=

$$z=-۳+۴i \rightarrow z^{-1}=\frac{۱}{۲۵}(-۳-۴i)=\boxed{\frac{-۳}{۲۵}-\frac{۴}{۲۵}i}$$

Scanned by CamScanner

تقسیم دو عدد مختلط اگر $z=x+yi$ و $w=a+bi$ دو عدد مختلط باشند، برای $\frac{z}{w}$ داریم:

$$\frac{z}{w}\times\frac{\bar{w}}{\bar{w}}=\frac{z\times\bar{w}}{|w|^2}$$

حفظ شود

هم! صورت و مخرج ضرب بر مزدوج مخرج می‌شود ✓

مثال:

$w=-i \quad , z=5-2i$

$$\frac{z}{w}=?\Rightarrow\frac{5-2i}{-i}\xrightarrow{\times\frac{i}{i}}=\frac{5i+2}{1}=5i+2\ \checkmark$$

مثال:

$$\frac{z}{w}=\frac{4-3i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}\overset{\text{(*)}}{=}\frac{-2-11i}{5}\rightsquigarrow\left|\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i\right|\ \checkmark$$

(*) $(4-3i)(1-2i)\Rightarrow 4-8i-3i-6\rightarrow -2-11i$ (*)

تمرین اگر داشته باشیم $ax^2+bx+c=0$، داشته باشیم $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ حل کنیم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ داشته باشیم چگونه جواب‌ها را بیابیم؟

Scanned by CamScanner

"ریاضی پیش" ⑭

۹۶/۷/۲۴

ضرب دو عدد مختلط بصورت هندسی

مثال =

$z = 2\sqrt{3} + 2i$
$w = 1 + \sqrt{3}i$

حل تحریری

$z \times w = (2\sqrt{3} + 2i)(1 + \sqrt{3}i) = 0 + 8i = \boxed{8i}$ ✓

$|z| = 4$ $\quad \arg(z) = \tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} \to \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ✓

حل جدید ⇒

$|w| = 2$ $\quad \arg(w) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} \to \frac{\pi}{3}$ ✓

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ⋮ $|z \times w| = 8$

$w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ⋮ ۶

⑭ نکته = اگر z و w دو عدد مختلط با اندازه‌های $|z|$ و $|w|$ باشند، اندازه $z \times w$ یک عدد مختلط با اندازه $|z||w|$ و زاویه $\theta + \rho$ است.

$z \times w = |z||w|(\cos(\theta+\rho) + i\sin(\theta+\rho))$

مثال =

$z = 5 - 5i$
$w = 4i$

$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$
$w = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\to \boxed{zw = 20\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ ✓

$|z| = 5\sqrt{2}$
$|w| = 4$

$\arg(z) = \frac{-\pi}{4}$
$\arg(zw) = \frac{\pi}{4}$

توان n ام

اگر z یک عدد مختلط باشد داریم:

$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$ ✓

یعنی اندازه به توان n و زاویه در n ضرب می‌شود!

$\arg(z^n) = n(\theta)$

مثال =

$z = 1 + i$ $\quad |z| = \sqrt{2} \to$

$z^{10} = ?$ $\quad \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$

$z^{10} = |z|^{10}(\cos 10\theta + i\sin 10\theta)$

$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\times 10\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 10\right)\right)$

$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$

$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}(0 + i) = \boxed{32i}$ ✓

Scanned by CamScanner

II

۸

$z = 1+\sqrt{3}i$

$z^{10} = ?$

مثال =

$z^{10} = |z|^{10}(\cos 10\theta + i\sin 10\theta)$

$\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$z^{10} = 2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3})$

$= 2^{10}(\cos(3\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(3\pi + \frac{\pi}{3}))$

$= 2^{10}(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

$= 2^{10}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -2^9 - 2^9\sqrt{3}i$ ✓

$10\theta \rightsquigarrow 10\times\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow 3\pi + \frac{\pi}{3}$

ریشه اعداد مختلط ◄ معادله امتحانی

مثال: $z = -4i$ می‌خواهیم $\sqrt{z}$ را محاسبه کنیم!

حل: عددی مختلط مثل w است که داریم:

$w^2 = z = -4i \Rightarrow \arg(w^2) = 2\arg(w) \Rightarrow \arg(w) = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ (۱) (۲)

(۱) $\Rightarrow \arg(w) = -\frac{\pi}{4}$

$|w^2| = |w|^2 = 4 \Rightarrow |w| = 2$

$w = 2(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$ ✓

(۲) $\arg(w) = \frac{3\pi}{4}$

$w = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ ✓

توضیح: اگر z عددی مختلط با بزرگی $|z|$ و با زاویه‌ی θ باشد، $\sqrt{z}$ عددی مختلط است با اندازه $\sqrt{|z|}$ و با زاویه‌ی $\frac{\theta + 2k\pi}{2}$ که $k = 0, 1$ می‌باشد.

توضیح کلی: اگر z عددی مختلط با بزرگی $|z|$ و با زاویه‌ی θ، $\sqrt[n]{z}$ عددی مختلط با اندازه $\sqrt[n]{|z|}$ و زاویه $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ است که $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ می‌باشد. (یعنی هرچی n هست از صفر تا یکی مونده قبلش!)

مثال: رادیکال درجه ۴، $z = -4i$ را بدست آورید. یکی حل $w^4 = -4i$ را حل کنید.

(دو حل صورت سوال)

Scanned by CamScanner

(III) (V)

$w^{12} = 8 - 8i$ =>

$|w|^{12} = 8\sqrt{2} \rightarrow |w|^{12} = \sqrt[12]{8\sqrt{2}}$

$\left.\begin{array}{l} \arg(w^{12}) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \\ 12\arg(w) = \pi \end{array}\right\} \rightarrow \arg(w) = \frac{-\frac{\pi}{8} + 2k\pi}{12}$

$k = 0, \dots, 11$

$w = \sqrt[12]{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$w = \sqrt[12]{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{8}\right)\right)$

.

(HP)

Scanned by CamScanner

$z^n = w$

$|z| = \sqrt[n]{|w|}$

$\arg(z) = \frac{2k\pi + \arg(w)}{n}$

$k = 0, \dots, n-1$

مثال) ریشه های سوم i را بدست آورید یا معادله $z^3 = i$ را حل کنید.

$|i| = 1 \rightarrow |z| = \sqrt[3]{1} = 1$

$\arg(z) = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$

$z_1 = 1\times(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$z_2 = 1\times(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$z_3 = 1\times(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6})$

مثال) $z^3 = (z+1)^3$ را بدست آورید.

$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{z}\right)^3 = 1$

$\arg(z) = \frac{2k\pi + 0}{3}$

$\rightarrow 1 + \frac{1}{z} = \begin{cases} k = 0,1,2 \\ 0 = \cos 0 + i\sin 0 \rightarrow 1 \\ 1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ 2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{z} = \begin{cases} 0 \rightarrow \times \\ ① -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2} \\ ② -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ مخلوط نشد!

$z = \frac{2}{-3+\sqrt{3}i} \times \frac{-3-\sqrt{3}i}{-3-\sqrt{3}i} =$ مخلوط و مزدوج (حذف رادیکال در مخرج)

$\rightarrow \frac{-6-2\sqrt{3}i}{12}$

② $-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ مخلوط و مزدوج!

Scanned by CamScanner

(11) (4)

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$:نکته

فرمول دموآور

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 4\sin\theta$

حل: $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = (\cos 4\theta + i\sin(4\theta)) = (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$

(حل)

$z^3 + iz^2 + z + i = 0$

$z(z^2+1) + i(z^2+1) = 0 \rightarrow (z^2+1)(z+i) = 0$

$i, -i$ $\quad$ $-i$

اعداد حقیقی

$\sqrt{\log_{10} \frac{x^2+2x}{x+1}} \Rightarrow \log \frac{x^2+2x}{x+1} > 0$ $\quad x \neq -1$

راه‌حل $\rightarrow \log_{10} \frac{x^2+2x}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2+2x}{x+1} \geq 1 \rightarrow \frac{x^2+2x-x-1}{x+1} \geq 0$

$\hookrightarrow \frac{x^2+x-1}{x+1} \geq 0 \rightarrow$

x	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
صورت	$+$	0 $-$		$-$	0	$+$
مخرج	$-$	$-$	0	$+$		$+$
کل	$-$	0 $+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$D_f = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ ✓

(حل)

$|3x-1| \leq 1 \rightarrow -1 \leq 3x-1 \leq 1 \rightarrow 0 \leq 3x \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ✓

(حل)

$|3x-1| > |x-3|$

ریشه‌ها: $\frac{1}{3}$ و 3

بین سه حالت داریم:

① اگر $x \geq 3$: $3x-1 > x-3 \rightarrow x > -2$ پس $[3, +\infty) \cap (-2, +\infty) = [3, +\infty)$

② اگر $\frac{1}{3} \leq x < 3$: $3x-1 > 3-x \rightarrow x > \frac{2}{3}$ پس $[\frac{1}{3}, 3) \cap (\frac{2}{3}, +\infty) = (\frac{2}{3}, 3)$

③ اگر $x < \frac{1}{3}$: $1-3x > 3-x \rightarrow x < -2$ پس $(-\infty, \frac{1}{3}) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$

جواب آخر $\rightarrow D = (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$ ✓

Scanned by CamScanner

معادله خط شیب - یک نقطه

(a,b) — m

شیب خط قائم | شیب خط حوالی | زاویه | هر نقطه

معادله خط $\Rightarrow y-b=m(x-a)$

مثال) معادله خط گذرنده از $(-1,1)$ و $(5,2)$ را بدست آورید.

$y+1=\frac{1}{4}(x-1) \rightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ ✓

معادله دایره به شعاع r و حول (a,b) به صورت $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$!

مثال = مرکز و شعاع $x^2+y^2-4x+4y=8$ را بدست آورید.

$x^2-4x+y^2+4y=8$

$(x-2)^2+(y+2)^2=16$ $\rightarrow$ $r=4$ و $(2,-2)$ ✓

سهمی همه نقاطی که فاصله آنها از نقطه ثابت P و خط L که از P نمی‌گذرد به یک اندازه است.

P کانون سهمی و L هادی سهمی می‌گوییم و خط گذرنده از P، عمود بر L را محور سهمی می‌نامیم.

سهمی همدی را بررسی می‌کنیم:

$P=(0,p)$ $\quad L: y=-p$

$y=\frac{x^2}{4p}$

بیضی مجموعه نقاطی که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه ثابت صفحه‌ای ثابت است.

کانون‌ها

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

هذلولی = $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Scanned by CamScanner

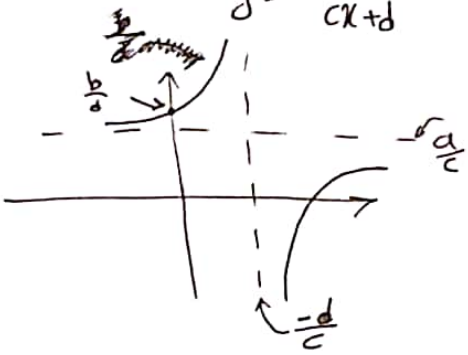
تابع (دامنه دارد) = توابعی که شامل ریشه مخرج و زیر رادیکال هستند، این نقاط از دامنه تابع خارج می‌شوند.

توابع زوج و فرد = اگر در تابع f، x را به $-x$ تبدیل کنیم و

$f(-x) = -f(x)$ ← تابع فرد است.

$f(-x) = f(x)$ ← تابع زوج است.

رسم نمودار $y = \frac{ax+b}{cx+d}$



$\lim_{x\to\infty} y = \frac{a}{c}$ ← مجانب افقی

$cx+d=0 \to x = \frac{-d}{c}$ ← مجانب قائم

$f(0) = \frac{b}{d}$

نکته = توابع مثلثاتی فقط روی زاویا تعریف می‌شوند: مثلاً $\sin$ تعریف نشده است!

می‌خواهیم توابع مثلثاتی را روی اعداد حقیقی تعریف کنیم به صورت زیر عمل کنیم.

فرض کنید x یک عدد حقیقی (مثلاً ۱۰) باشد. روی دایره واحد به اندازه ۱۰ واحد حرکت می‌کنیم، نقطه توقف را بعداً وصل می‌کنیم.

و زاویه بدست آمده را θ می‌نامیم. تعریف می‌کنیم $\sin x = \sin\theta$ به این اعداد رادیان گفته می‌شود.

نکته: عدد π همواره برابر ۳٫۱۴ است یعنی اگر به اندازه π رادیان روی دایره حرکت کنیم به زاویه ۱۸۰° می‌رسیم زیرا:

π رادیان $\Rightarrow$ ۱۸۰°

x $\Rightarrow$ ۳۶۰°

$\Rightarrow x = 180°$

چند نکته مثلثاتی!

$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}(2\pi+\theta) \Rightarrow \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}\theta$

$\left.\begin{matrix}\tan\\ \cot\end{matrix}\right\}(\pi+\theta) \to \left.\begin{matrix}\tan\\ \cot\end{matrix}\right\}\theta$

$\left.\begin{matrix}\cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}(\pi-\theta) = \left.\begin{matrix}-\cos\\ -\tan\\ -\cot\end{matrix}\right\}\theta$

$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

$\cos -\theta = \cos\theta$

$\left.\begin{matrix}\sin\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}(-\theta) = \left.\begin{matrix}-\sin\\ -\tan\\ -\cot\end{matrix}\right\}\theta$

⊕ وقتی زاویه‌ای را به اضافه $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ می‌شود $\sin$ به $\cos$، $\cos$ به $\sin$ تغییر می‌کند! زاویه به θ تبدیل می‌شود و علامت ⊕ یا ⊖ مثل سابق با اصل ⊕ و ⊖ بودن $\sin$، $\cos$ دوطرف سؤال است.

Scanned by CamScanner

مثال

(۱,۲) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\theta)$

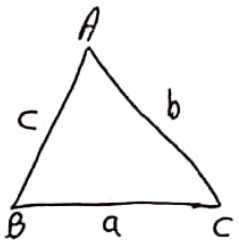
نکات مثلثاتی

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ، $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



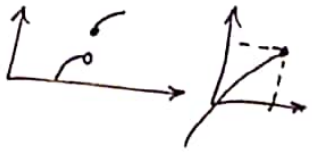
$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

$c^2+a^2+b^2-2ab\cos c=\sin C$

پیوستگی | بازای هرباره J حول $f(a)$ از I حول a پیوسته است اگر $f(x)\in J$ آنگاه می‌توان عدد $\delta>0$ یافت

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: |x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: 0<|x-a|<\delta \to |f(x)-f(a)|<\varepsilon$



مثال) ثابت کنید $\lim_{x\to 2}x^2+1=5$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: 0<|x-2|<\delta \to |f(x)-5|<\varepsilon \to |x^2-4|<\varepsilon$

$\hookrightarrow |x-2||x+2|<\varepsilon \to |x-2|<\frac{\varepsilon}{|x+2|} \to |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{x+2}$

کافی است $\delta\le\varepsilon$ قرار داده شود!

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} \to \lim_{x\to 1} x+1 \to 2$ ✓

(1,2)

$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} =$

$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \to \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}$

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \frac{-3}{1} =$ (3) ✓

$\frac{1}{32}$ ✓

$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2+x-6} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-x-6} \to \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} \to \frac{1}{5}$ ✓

$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$= \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to a} h = \lim_{x\to a} g = b \to \lim_{x\to a} f(x) = b$

Scanned by CamScanner

(۴) ریاضی دیگی در مورد حق استفاده از (H) نداریم!

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$$

تعریف نهایت =

$x\to-\infty \Rightarrow -1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+x}}\Rightarrow\lim\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=?$$

$$\hookrightarrow\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

۵- پیوستگی

نکته = ناپیوستگی بعضی از توابع رفع شدنی و بعضی رفع نشدنی است.

مثلاً تابع $\frac{1}{x}$ رفع نشدنی است.

مثال) نشان دهید $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}$ دارای توضیح پیوسته به $x=1$ است.

سه حالت که صحبت پیش دست ترند فقط بزرگتر بگیرند!

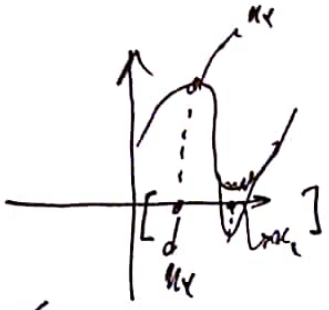
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\to\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\xrightarrow{\text{ساده کردن}}\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & x\neq1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

قضیه

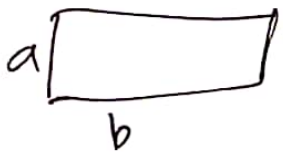
مثال از کجای عبدی تواند آن!



- اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد $\Rightarrow$ f ماکزیمم و مینیمم خود را حتی می‌گیرد.

$$\exists x_1,x_2\in[a,b]:\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$$

مثال ۱۰۰: بیشترین مساحت ممکن یک مزرعه مستطیلی که می‌توان با ۲۰۰ متر حصار، محصور کرد را بیابید.



$$2a+2b=200\Rightarrow a+b=100\rightarrow a=100-b$$

$$ab=(100-b)b=100b-b^2=f(b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b)=-b^2+100b=-(b^2-100b+2500-2500)$$

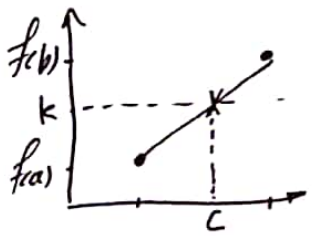
خودمون حدس بزنیم توشی!

$$=-(b-50)^2+2500\Rightarrow b=50\rightarrow a=50$$

تعریف: مقدار میانی

اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و $f(a)\le k\le f(b)$

$$\exists c\in(a,b),\ f(c)=k$$



مثال بازه‌هایی را تعریف کنید که x^2-2x برآنها $\oplus$ و یا $\ominus$ است.

$f(x)=x(x-2)(x+2)$

می‌خواهیم ثابت کنیم تابع f در بازه‌ی $(2,\infty)$ مثبت است.

ابتدا عددی دلخواه مثل $x=3$ را در تابع f جایگذاری می‌کنیم و داریم $f(x)=15>0$ یعنی $\oplus$! اگر در این بازه‌ی $(2,\infty)$ در یک جا x ای وجود داشته باشد که $f(x)<0$ یعنی $\ominus$ شود طبق خاصیت مقدار میانی در بازه $(3,x)$ یا $(x,3)$ نقطه‌ای وجود دارد مثل c که $f(c)=0$ است که این تناقض دارد چون ریشه‌های f، $x=0$ و $x=2$ هستند!

در نتیجه در بازه $(2,\infty)$ تابع f مثبت است! بطور مشابه برای بقیه بازه‌ها هم ثابت است!

حل = مثبت $(2,\infty)\cup(-2,0)$

منفی $(0,2)\cup(-\infty,-2)$

Scanned by CamScanner

(III) دیفی!

مثال صفحه ۱

ثابت کنید تابع $x^3 - x - 1$ در بازه $[1,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

حل:

$f(1) = -1 < 0$
$f(2) = 5 > 0$
$\Rightarrow$ طبق قضیه مقدار میانی $\exists c : f(c) = 0$

حل ۲! $\leftarrow$ بیایی حداقل از کلمه دقیقاً استفاده نمی کنی!

حل ۲: اول همین راه حداقل رو می ریم! بعد دقیق می گیریم بعد تعیین علامت!

$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightsquigarrow 3x^2 - 1 = 0$
$\leftarrow x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$

x	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		1	2
$3x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
					صعودی!	

در بازه $[1,2]$ مثبت است $\leftarrow$ در این بازه صعودی اکید است $\leftarrow$ دقیقاً یک ریشه دارد!

Scanned by CamScanner

توابع متقابل f

* تابع وارون = هرگاه تابع f یک به یک باشد (یعنی اگر $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه بگیریم $x_1=x_2$).

تابع وارون f^{-1} را می‌توان بدست آورد.

نکته = وارون $\ln x$ میشه e^x !

مثال ① $y=x^3$

اسا بودن:

$x_1^3=x_2^3 \rightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)=0$

اگر $x_1x_2>0$ ← $x_1=x_2$

اگر $x_1x_2<0$ ← $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-x_1x_2=0 \Rightarrow (x_1+x_2)^2-x_1x_2=0 \rightarrow x_1x_2=0$ ✗

$x_1=x_2$ ✓

پس $y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

توجه کنید که f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است.

اگر f یک به یک نباشد دامنه‌ای را محدود می‌کنیم تا در دامنه جدید یک به یک باشد و سپس f^{-1} را بدست آوریم.

مثال = $f(x)=x^2$. کافیست دامنه را $(0,\infty)$ در نظر بگیریم. $\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$



لگاریتم

$y=\log_a^x \Rightarrow x=a^y$, $a>0$, $a\neq 1$!

خاصیت:

$\log_a(xy)=\log_a^x+\log_a^y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a^x-\log_a^y$

$\log_a^x=\frac{\log_b^x}{\log_b^a}$

مثال ⇐ $3^{x-1}=2^x$

$\log 3^{x-1}=\log 2^x \rightarrow (x-1)\log 3=x\log 2 \rightarrow x\log 3-x\log 2=\log 3$

① log می‌گیریم!

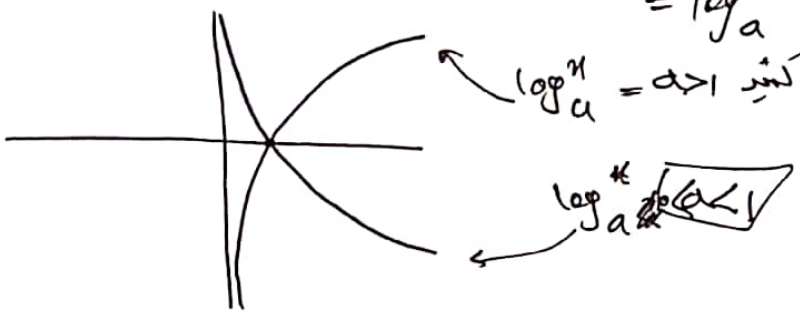
$\Rightarrow x=\frac{\log 3}{\log 3-\log 2}=\frac{\log 3}{\log\frac{3}{2}}=\log_{\frac{3}{2}}^3=2.7=x$

Scanned by CamScanner

دامنه $\log_{10}^{x}$ $= (0, \infty)$

نمودار $\log_a^x$

فرض کنید $a > 1$

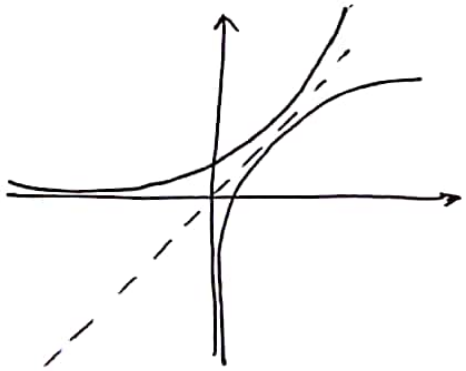


اگر $a = e$ باشد به آن لگاریتم طبیعی می‌گوییم و به جای $\log_e^x$ از $\ln x$ نشان می‌دهیم.

نکته: وارون تابع $f(x) = a^x$ برابر $\log_a^x = f(x)$ ، $a > 0$, $a \neq 1$

نمودار $\log_a^x$ $a > 1$

a^x $0 < a < 1$



نکته: $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

توابع مثلثاتی معکوس‌پذیر نیستند! تابع sin، -1 تا 1



دامنه $\sin x$ را به بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم تا -1 تا 1 شود!

حال می‌توانیم از تابع وارون استفاده کنیم. توجه کنید که برای هر تابع f دامنه f برابر برد f^{-1} و برد f برابر دامنه f^{-1} است.

$$\left.\begin{array}{l} D_{\sin x} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ R_{\sin x} = [-1, 1] \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R_{\sin^{-1}(x)} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ D_{\sin^{-1}(x)} = [-1, 1] \end{array}\right.$$

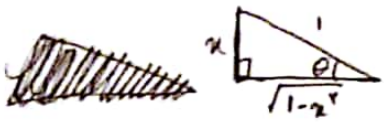
برای تابع $\sin^{-1} x$

دامنه:

Scanned by CamScanner

مثال)

$\tan(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\theta})$? $x=0.2$ حل ←

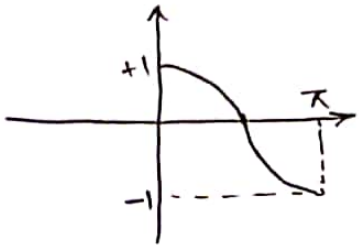


مثلثی با ضلع تابع x و وتر ۱ رسم می‌کنیم، سپس ضلع سوم را برابر $\sqrt{1-x^2}$ درنظر می‌گیریم.
و $\tan\theta$ را بدست می‌آوریم.

$\sin\theta = x$
$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{0.2}{\sqrt{1-0.04}} =$ جواب مورد نظر

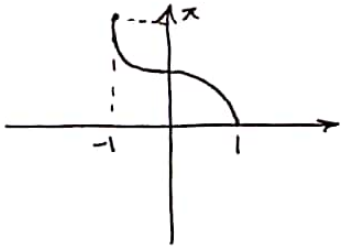
★ برای تابع $\arccos x$ یا $\cos^{-1}x$ دامنه $\cos x$ را به $[0,\pi]$ محدود می‌کنیم، داریم:



$D_{\cos\theta} = [0,\pi]$

$R_{\cos\theta} = [-1,1]$

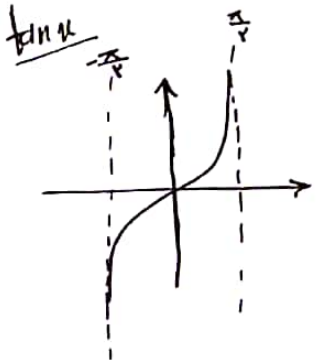
تابع $\cos^{-1} = \arccos$ را بصورت زیر رسم می‌کنیم:

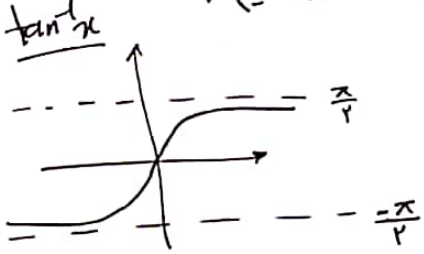


$D_{\cos^{-1}\theta} = [-1,1]$

$R_{\cos^{-1}\theta} = [0,\pi]$

برای $\tan^{-1}x$ دامنه $\tan x$ را به $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ محدود می‌کنیم:





مثال)

$\tan(\tan^{-1}4) = 4$

$\tan^{-1}(\tan 4) = 4 - \pi$ ولی داخل $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ نیست

$\tan(\tan^{-1}3) = 3$

$\tan^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} \rightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ باید بین بازه باشد

$\cos(\underbrace{\tan^{-1}(2)}_{\theta}) \Rightarrow \cos\theta = ?$

$\tan^{-1}(2) = \theta \rightarrow \tan\theta = 2 \rightarrow 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow$

$5 = \frac{1}{\cos^2\theta} \rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ ← فقط مثبت قابل قبول است!

Scanned by CamScanner

$\star \Rightarrow \boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$

تابع هذلولی (هذلولوی) :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

روابط توابع هذلولی (مثل $\sinh x$ و...)

به غیر از بقیه حفظ شود!

۱) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

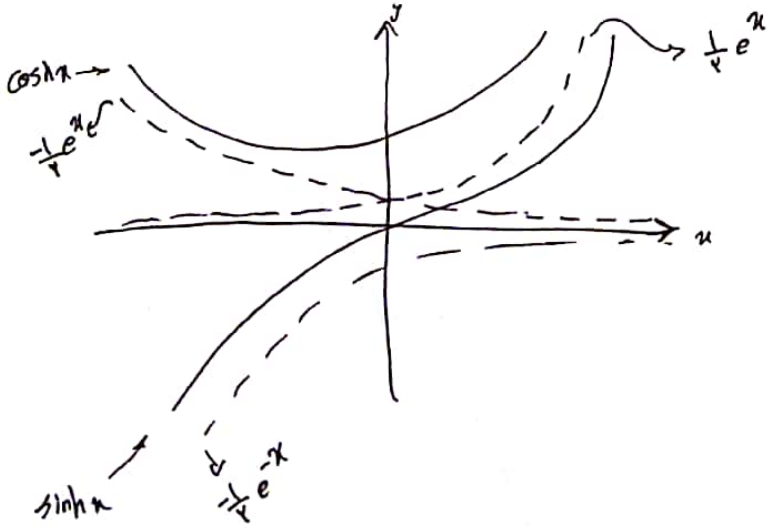
۲) $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$

۳) $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$

۴) $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$ ⟵ به نفعت!

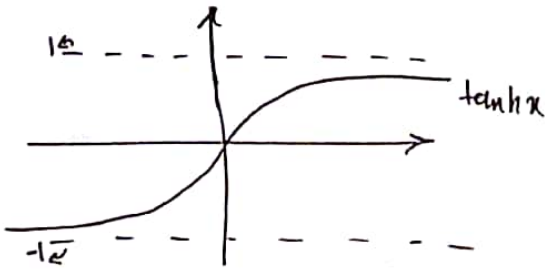
۵) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

۶) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$





شکل =



Scanned by CamScanner

$$\sin^{-1}hx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\cos ix = \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(ix) = i\sin x$$

$$\sin(ix) = \frac{1}{i}\sinh(-x) = i\sinh x$$

Scanned by CamScanner

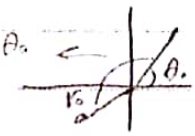
Subject:
Date

مختصات قطبی و منحنی‌های قطبی: هر نقطه در صفحه دکارتی را می‌توان به دو صورت (x, y) (مختصات دکارتی) و (r, θ) (مختصات قطبی) بررسی می‌کرد. معمولاً برای θ می‌نویسیم $[0, 2\pi]$ و به آن نمایش قطبی می‌گوییم:

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

نکته: همان طور که در صفحه دکارتی می‌توان معادله خط و منحنی و ... نوشت، در مختصات قطبی هم می‌توان این معادله‌ها را داشت.

نکته: منحنی‌ها از (r_0, θ_0) و $(-r_0, \theta_0)$ نقطه زیاست.



مثال: معادله خط $2x + 3y = 5$ را به صورت قطبی بنویسید.

$$2r\cos\theta + 3r\sin\theta = 5 \rightarrow r = \frac{5}{2\cos\theta + 3\sin\theta}$$

مثال: معادله قطبی $r = 2a\cos\theta$ را شناسایی کنید.

$$r^2 = 2ar\cos\theta \rightarrow x^2+y^2 = 2ax \rightarrow (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

← این معادله، معادله یک دایره به شعاع a و حول نقطه $(a, 0)$ است

نکته: در برخی حالات با تبدیل معادله قطبی به معادله (x, y) شکل نمودار را می‌توان تشخیص داد ولی برخی در برخی از موارد این کار امکان پذیر نیست. در این حالت باید با مشخص کردن چند نقطه شکل کلی را مشخص نمود.

PqPCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Date

نکته : در مختصات (x,y) اگر در تابع $y=f(x)$ قرار دهیم $y=f(x+a)$ ، نمودار به اندازه a به سمت چپ حرکت می‌کند یا مثلاً $y=f(x)+a$ ، نمودار به اندازه a به سمت بالا حرکت می‌کند.

اگر در معادله $r=f(\theta)$ قرار دهیم $r=f(\theta-\theta_0)$ ، نمودار به اندازه θ_0 در جهت پادساعتی می‌چرخد.



مثلاً در مثال قبل داریم : $r=f(\theta-\frac{\pi}{4})$

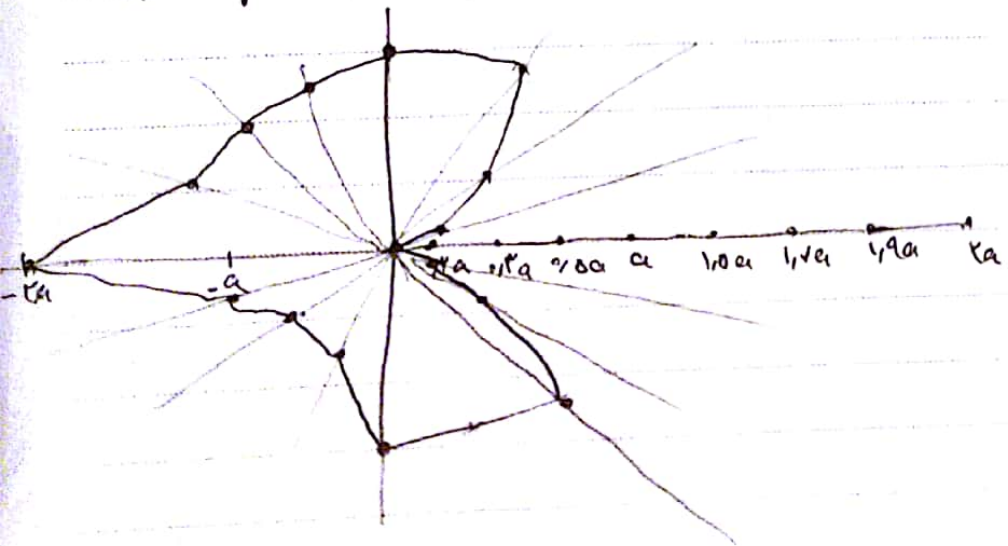
مثال : منحنی قطبی $r=a(1-\cos\theta)$ را رسم کنید.

$$r^2=a(r-r\cos\theta) \longrightarrow x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$$

$$\longrightarrow x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow (x^2+y^2+ax)^2=a^2(x^2+y^2)$$

تبدیل معادله قطبی به معادله دکارتی جواب نمی‌دهد $\Leftarrow$ از راه دیگری باید استفاده کنیم

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
r	0	$0/2a$	$0/3a$	$0/5a$	a	$1/5a$	$1/7a$	$1/9a$	$2a$



Scanned by CamScanner

در برخی موارد کافی است θ هایی را پیدا کنیم که $r=0$ یا ماکسیمم شود. یعنی ماکسیمم و مینیمم تابع $r=f(\theta)$ را بررسی کنیم.

$r = \cos 2\theta$

min : $2\theta = 2k\pi + \pi \rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$

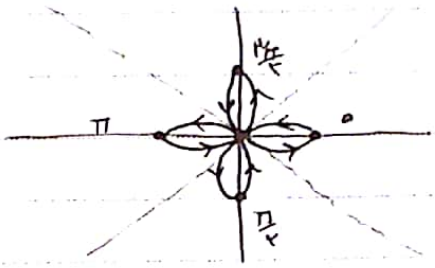
max : $2\theta = k\pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2}$

$k=0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$k=1 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

$k=2 \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$

$k=3 \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$



$k=0 \rightarrow \theta = 0$

$k=1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$k=2 \rightarrow \theta = \pi$

$k=3 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

$r = \sin^2\theta \rightarrow$ 

$r^2 = \cos 2\theta \rightarrow$ 

Scanned by CamScanner