# www.fera.ir

# هر آنچه شما نیاز دارید




# هر جزوه ای که بخوایی

www.fera.ir

# آموزش
# هندسه ی تحلیلی و جبرخطی

دوره ی پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

فصل اول : فضای سه بعدی و بردار

تهیه کننده: جابر عامری
دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

مهر ۱۳۸۹

www.fera.ir

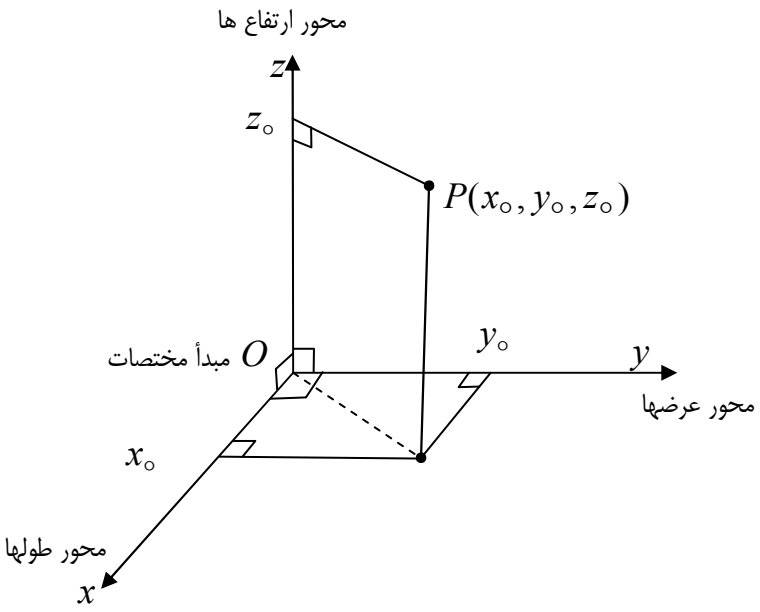


**باسمه تعالی**

# فصل اول: بردار ها

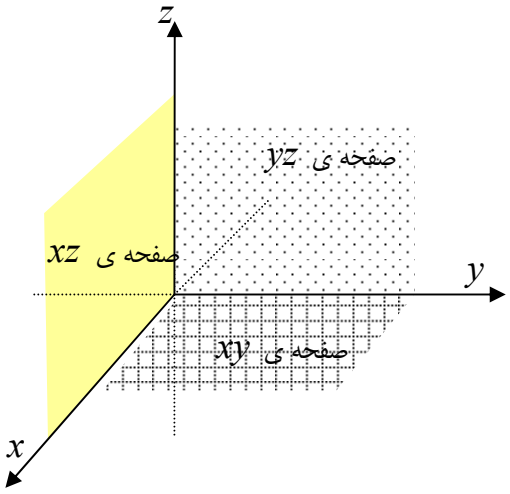
## فضای سه بعدی

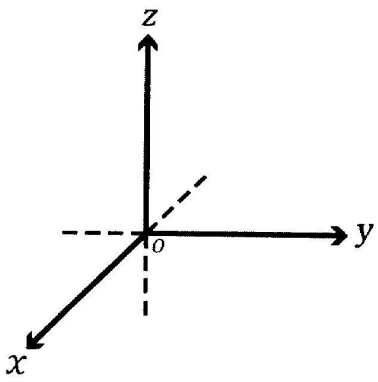
اگر $R$ مجموعه ی اعداد حقیقی باشد در این صورت مجموعه ی $R^3 = R \times R \times R = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in R\}$ فضای سه بعدی نامیده می شود. هر نقطه در فضای سه بعدی نسبت به سه محور دو به دو عمود بر هم که از یک نقطه می گذرند، مشخص می شود بنابر این هر نقطه در $R^3$ دارای سه مؤلفه است. $x_0$ را طول ، $y_0$ را عرض و $z_0$ را ارتفاع می نامند.

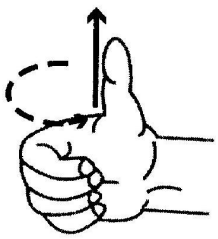



$P(x_0, y_0, z_0)$

در فضای سه بعدی ، سه صفحه مختصات موجود است و لذا هشت ناحیه(ثمن) در فضا شکل می گیرد.توجه داشته باشید که دستگاه مختصات سه بعدی راست گرد است یعنی با انگشتان دست راست جهت مثبت محور ها را می توان مشخص کرد.



www.fera.ir



**تمرین:** هر یک از نقاط زیر را روی دستگاه مختصات سه بعدی نمایش دهید.

الف) $A(۱,۲,۳)$ ج) $C(-۱,۲,۴)$

ب) $B(۲,۰,۱)$ د) $D(۰,۰,۵)$

**تذکر:**

۱- اگر یک مؤلفه از سه مؤلفه ی نقطه ای صفر باشد،آن نقطه روی صفحه ای قرار می گیرد که مؤلفه ها ی نظیر آن صفر نباشند.

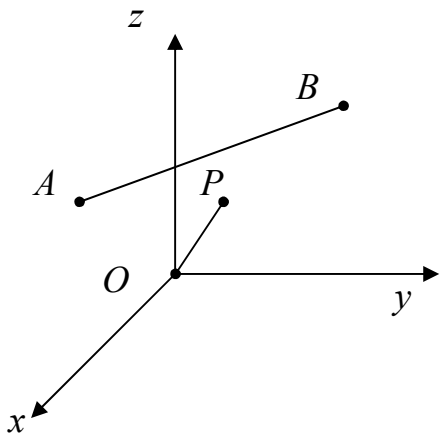
۲- اگر دو مؤلفه از سه مؤلفه ی نقطه ای صفر باشند،آن نقطه روی محوری از دستگاه مختصات قرار می گیرد که مؤلفه ی متناظر آن صفر نباشد.

***

## اندازه ی پاره خط (طول پاره خط)

اگر $A$ و $B$ دو نقطه در دستگاه مختصات سه بعدی باشند، در این صورت واضح است که

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲+(z_B-z_A)^۲}$$




**نتیجه:** اگر مبدأ مختصات و یک نقطه ی دلخواه در فضا فرض شود در این صورت

$$|OP|=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}$$

***

**تمرین:** اگر $A(۳,۱,-۱)$ و $B(۱,۰,۲)$ طول پاره خط $AB$ را بدست آورید.

**تمرین:** اگر نقاط $M$ و $N$ به ترتیب تصاویر قائم نقطه ی $A(۳,-۴,۲)$ بر صفحات $xoz$ و $yoz$ باشند. طول پاره خط $MN$ را محاسبه کنید.

www.fera.ir

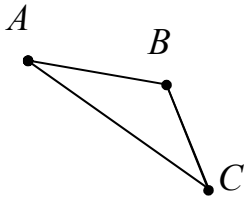


## ویژگی های طول پاره خط

اگر $A$ و $B$ و $C$ سه نقطه فرض شوند، در این صورت

الف)اگر $A$ و $B$ روی هم منطبق باشند،آنگاه $|AB|=۰$ و برعکس.یعنی $|AB|=۰$ اگر و فقط اگر $A=B$

ب) طول پاره خط های $AB$ و $BA$ برابر است. $|AB|=|BA|$



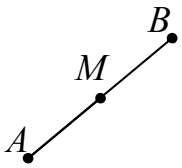

ج) در هر مثلث مجموع طولهای هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.(نامساوی مثلثی)

$$|AB|+|BC|>|AC|$$

## مختصات نقطه ی وسط پاره خط

اگر $M$ نقطه ی میانی پاره خط $AB$ فرض شود، در این صورت

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$




$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

$$z_M=\frac{z_A+z_B}{۲}$$

***

**تمرین:** اگر $A(۱,۰,۲)$ و $B(۳,۱,-۱)$

الف) مختصات نقطه ی $M$ نقطه ی وسط پاره خط $AB$ را بدست آورید.

ب) طول پاره خط $OM$ را تعیین کنید.

**تمرین:** اگر $A(۱,۰,۲)$ و $B(۳,۲,۳)$ و $C(۱,۲,-۱)$ سه رأس مثلثی باشند، طول میانه ی $AM$ را بیابید.

**تمرین:** اگر $A(-۱,-۳,۲)$ و $B(۱,۲,-۳)$ و مبدأ مختصات سه رأس یک مثلث باشند،

الف: نوع مثلث $AOB$ را تعیین کنید . ب : طول میانه ی $OM$ را بیابید.

**تمرین:** اگر $A(۵,۱,۵)$ و $B(۴,۳,۲)$ و $C(-۳,-۲,۱)$ سه رأس یک مثلث باشند،

الف: نوع مثلث $ABC$ را تعیین کنید. ب : مساحت و محیط مثلث را بدست آورید.

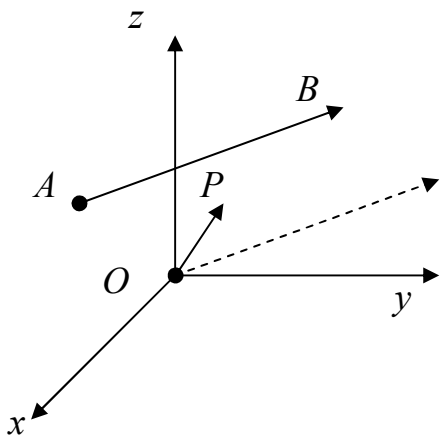
www.fera.ir



## بردار ها در فضای سه بعدی

هر پاره خط جهت دار در فضای $R^3$ را یک پیکان می نامند. مانند پیکان $\overrightarrow{AB}$

هر پیکان دارای مختصاتی به صورت زیر است.




$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

دو پیکان وقتی مساویند که مختصات یکسان داشته باشند. به عبارت دیگر هم جهت، هم راستا و هم اندازه باشند.

هر پیکان که نقطه ی ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را یک بردار (بردار مکان) در $R^3$ می نامند. مانند $\overrightarrow{OP}$

هر بردار در $R^3$ با مختصات نقطه ی پایانی آن نمایش داده می شود. مثلاً می نویسند:

$$\vec{p} = (a_1, a_2, a_3)$$

که در آن اعداد حقیقی $a_3$ و $a_2$ و $a_1$ مؤلفه های بردار نامیده می شوند.

**تذکر:** هر پیکان در فضای $R^3$ دارای یک بردار مساوی آن می باشد. بنابراین در اینجا فقط ویژگی های بردار ها را بررسی می کنیم.

**تمرین:** اگر $A(1,2,4)$ ابتدا و $B(-1,3,2)$ انتهای یک پیکان باشند. مختصات بردار (بردار مکان) مساوی پیکان $\overrightarrow{AB}$ را بدست آورید.

**تمرین:** بردار های $\vec{p} = (1,2,3)$ و $\vec{q} = (1,-2,4)$ را در دستگاه $R^3$ نمایش دهید.

***

www.fera.ir



**نتیجه:**

۱- بین بردار های $R^3$ و نقاط فضای $R^3$ یک تناظر دو سویی برقرار است.یعنی هر نقطه ی $R^3$ را می توان با یک بردار و هر بردار را می توان با یک نقطه در $R^3$ نمایش داد.

۲- برداری که نقطه ی پایانی آن مبدأ مختصات باشد را بردار صفر می نامند و آنرا با $\vec{o}$ نمایش می دهند.

$$\vec{o} = (0,0,0)$$

۳- طول بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ که با $|\vec{a}|$ نشان داده می شود برابر است با

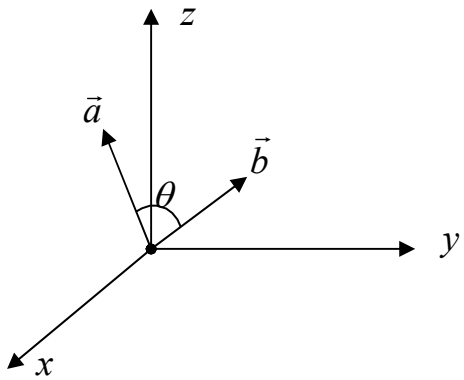
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

در این صورت برای هر بردار مانند $\vec{a}$ در فضا می توان نوشت:

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

۴- دو بردار را مساوی گویند هرگاه مؤلفه های نظیر به نظیر آنها مساوی باشند.

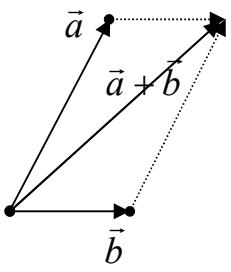
$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$




۵- زاویه ی بین دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ زاویه ای است مانند $\theta$ که همواره در محدوده ی $0 \le \theta \le \pi$ قرار دارد.

**تعریف:** اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، حاصل جمع این دو بردار را که با $\vec{a} + \vec{b}$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می کنیم.

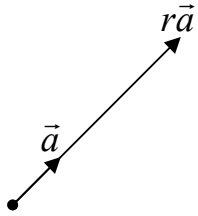
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



www.fera.ir



**تعریف:**اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار و $r$ یک عدد حقیقی باشد،حاصل ضرب $r$ در بردار $\vec{a}$ که به ضرب اسکالر معروف است،را به صورت زیر تعریف می کنیم.




$$r\vec{a}=r(a_1,a_2,a_3)=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

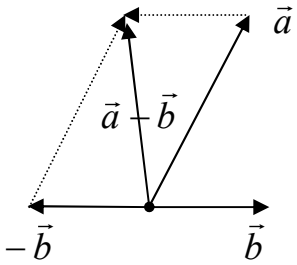
**نتیجه :**

۱- قرینه ی بردار $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نمایش می دهند که از حاصل ضرب عدد ۱- در بردار $\vec{a}$ بدست می آید.

$$-\vec{a}=-1\vec{a}=(-a_1,-a_2,-a_3)$$

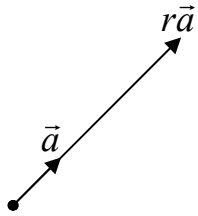
۲- اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، در این صورت تفاضل این دو بردار یعنی $\vec{a}-\vec{b}$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1,a_2,a_3)+(-b_1,-b_2,-b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$$

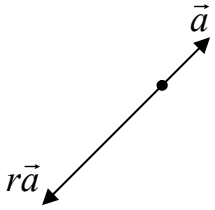



۳- اگر $r$ یک عدد حقیقی و $\vec{a}$ یک بردار باشد، در این صورت

الف) اگر $r$ مثبت باشد، بردار $r\vec{a}$ با بردار $\vec{a}$ هم جهت است.




ب) اگر $r$ منفی باشد، بردار $r\vec{a}$ در جهت مخالف بردار $\vec{a}$ است.




ج) اگر $r$ صفر باشد، بردار $r\vec{a}$ نیز صفر است.

د) در هر صورت $|r\vec{a}|=|r||\vec{a}|$ زیرا:

$$|r\vec{a}|=\sqrt{(ra_1)^2+(ra_2)^2+(ra_3)^2}=\sqrt{r^2a_1^2+r^2a_2^2+r^2a_3^2}$$
$$=\sqrt{r^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}=|r|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=|r||\vec{a}|$$

**نتیجه:** اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر و موازی باشند،پس وجود دارد یک عدد حقیقی و ناصفر مانند $r$ بطوری که $\vec{a}=r\vec{b}$

www.fera.ir



**تمرین:** اگر $\vec{a}=(1,-3,2)$ و $\vec{b}=(-4,-1,0)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\vec{a}+\vec{b}=$

۲) $\vec{a}-\vec{b}=$

۳) $2\vec{a}=$

۴) $3\vec{a}-2\vec{b}=$

۵) $|\vec{a}|=$

۶) $|\vec{b}|=$

۷) $|\vec{a}|+|\vec{b}|=$

۸) $|2\vec{a}|=$

۹) $|\vec{a}+\vec{b}|=$

**قضیه :** فرض کنیم که $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار دلخواه و $\vec{o}$ بردار صفر و $r$ و $s$ دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ خاصیت جابجایی جمع بردار ها

۲) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ خاصیت شرکت پذیری جمع بردار ها

۳) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$

۴) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o}$

۵) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۶) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷) $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

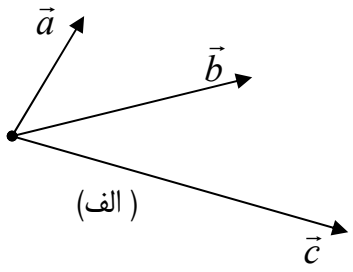
۸) $1\vec{a}=\vec{a}$

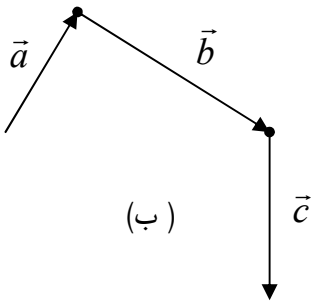
۹) $0a=\vec{o}$

۱۰) $r\vec{o}=\vec{o}$

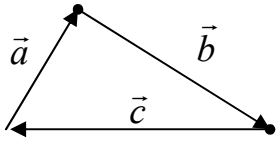
**تمرین:** قضیه ی فوق را ثابت کنید.

**تمرین :** در هر مورد مجموع بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ را رسم کنید.



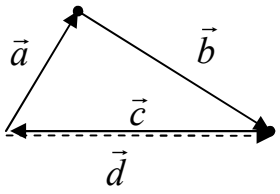




**تمرین :** با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$




حل: واضح است که $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$ و $\vec{d}=-\vec{c}$

لذا




$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{c}=-\vec{c}+\vec{c}=\vec{o}$$

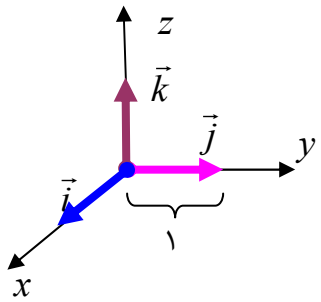
www.fera.ir



## بردار واحد (یکه)

هر بردار که اندازه ی آن برابر یک باشد را **بردار واحد** می نامند.

**تمرین:** نشان دهید که بردار $\vec{a}=(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}},\frac{-۱}{\sqrt{۱۴}},\frac{-۲}{\sqrt{۱۴}})$ یک بردار واحد است.




از بین بردار های واحد، بردار ها ی $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{k}=(۰,۰,۱)$

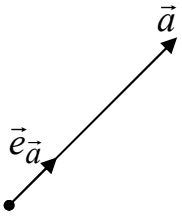
که از اهمیت ویژه ای برخوردارند را بردار های واحد مختصات می نامند.

هر بردار را می توان برحسب بردار های واحد مختصات نوشت.

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$$
$$\rightarrow \vec{a}=(a_۱,۰,۰)+(۰,a_۲,۰)+(۰,۰,a_۳)$$
$$\rightarrow \vec{a}=a_۱(۱,۰,۰)+a_۲(۰,۱,۰)+a_۳(۰,۰,۱)$$
$$\rightarrow \vec{a}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$

برای هر بردارغیر صفر مانند $\vec{a}$ برداری موسوم به **بردار جهت** $\vec{a}$ می توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$$




**نتیجه:**

۱- بردار جهت بردار $\vec{a}$ برداری با طول واحد است.

$$|\vec{e}_{\vec{a}}|=|\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}|=|\frac{۱}{|\vec{a}|}||\vec{a}|=\frac{۱}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=۱$$

۲- چون $\frac{۱}{|\vec{a}|}$ مثبت است، بردار جهت بردار $\vec{a}$ هم راستا و هم جهت با $\vec{a}$ می باشد.

۳- بردار جهت بردار $\vec{a}$ جهت $\vec{a}$ را مستقل از اندازه آن مشخص می کند.

www.fera.ir



**نتیجه:**

با توجه به تعریف فوق می توان نوشت:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_{\vec{a}}$$

یعنی هر بردار با یک کمیت عددی غیر منفی $|\vec{a}|$ که اندازه ی آن است و یک جهت $\vec{e}_{\vec{a}}$ مشخص می شود.

**تمرین:** اگر $\vec{a} = (۳,-۱,۲)$ یک بردار باشد.

الف) بردار $\vec{a}$ را بر حسب بردار های واحد مختصات بنویسید.

ب) اندازه ی بردار $\vec{a}$ را تعیین کنید.

ج) بردار جهت بردار $\vec{a}$ را بنویسید.

**تمرین:** اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} - \sqrt{۳}\vec{j} + \sqrt{۵}\vec{k}$ و $r = ۲$ باشد.

الف) اندازه ی بردار $r\vec{a}$ را بدست آورید.

ب) بردار جهت بردار $r\vec{a}$ را بنویسید.

**تمرین:** اگر $\vec{a} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j}$ و $\vec{b} = -۲\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ باشد. تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $|\vec{a}|$ ب) $|\vec{b}|$ ج) $|\vec{a}+\vec{b}|$ د) $\vec{e}_{\vec{a}+\vec{b}}$

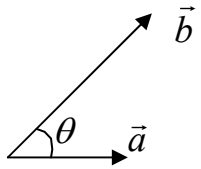
***

www.fera.ir



## ضرب داخلی دو بردار

اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر باشند و $\theta$ زاویه ی بین آنها در نظر گرفته شود.در این صورت ضرب داخلی (ضرب نقطـه ای) دو بردار به شکل زیر تعریف می شود.



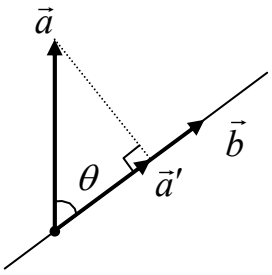

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

**تمرین:** اگر $|\vec{b}| = \sqrt{۳}$ و $|\vec{a}| = \sqrt{۱۲}$ و زاویه ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ برابر ۳۰ درجه باشد. حاصل ضرب داخلـی ایـن دو بردار را بدست آورید.

### نتیجه:

۱- حاصل ضرب داخلی دو بردار همیشه یک عدد حقیقی است.

۲- اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر باشند و $\theta$ زاویه ی بین آنها فرض شود.تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ را می توان به شکل زیر تعیین کرد.

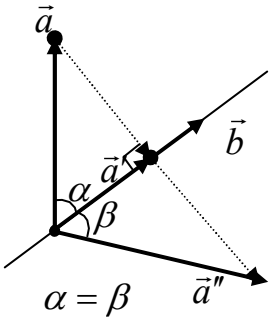



$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$$

اثبات لازم نیست.

۳- قرینه ی بردار غیر صفر $\vec{a}$ نسبت به امتداد بردار غیر صفر $\vec{b}$ را می توان به شکل زیر تعیین کرد.

$$\vec{a}'' = ۲\vec{a}' - \vec{a}$$




اثبات: با توجه به شکل دو مثلث رسم شده به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند.پس:

$$\vec{a}'' = \vec{a} + ۲(\vec{a}' - \vec{a})$$

$$\vec{a}'' = ۲\vec{a}' - \vec{a} = \frac{۲\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} - \vec{a}$$

***

www.fera.ir



**ویژگی های ضرب داخلی**

**ویژگی اول ضرب داخلی:** ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

اثبات: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=\vec{b}.\vec{a}$

**ویژگی دوم ضرب داخلی:** برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و هر عدد حقیقی $r$ همواره

$$r\vec{a}.\vec{b}=r(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.r\vec{b}$$

اثبات لازم نیست.

**ویژگی سوم ضرب داخلی:** برای هر بردار غیر صفر $\vec{a}$ همواره

$$\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$$

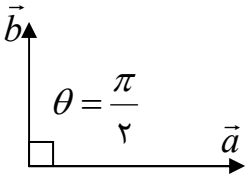
اثبات: واضح است که $\theta=۰$ پس:

$$\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\overbrace{\cos ۰}^{۱}=|\vec{a}||\vec{a}|=|\vec{a}|^{۲}$$

و اگر بردار $\vec{a}$ صفر باشد.تساوی بدیهی است.

**ویژگی چهارم ضرب داخلی:** برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ اگر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود است، آنگاه $\vec{a}.\vec{b}=۰$ و بر عکس

اثبات: اگر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود باشد.پس:




$$\theta=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\overbrace{\cos\theta}^{۰}=۰$$

اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$ پس $|\vec{a}|\neq۰$ و $|\vec{b}|\neq۰$ و چون $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۰$ لذا $\cos\theta=۰$ یعنی $\theta=\frac{\pi}{۲}$

**نتیجه:** طبق تعریف ضرب داخلی واضح است که:

الف) بردار های $\vec{k}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i}$ یکه هستند.

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=۱$$

ب) طبق ویژگی سوم ضرب داخلی داریم:

www.fera.ir



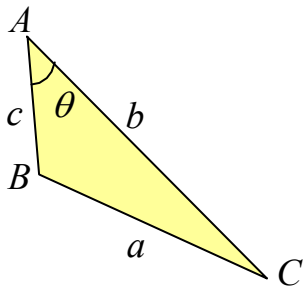
$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=|\vec{i}|^{۲}=|\vec{j}|^{۲}=|\vec{k}|^{۲}=۱$$

ج) چون بردار های واحد مختصات دو به دو بر هم عمودند، لذا

$$\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{i}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{j}=۰$$

***

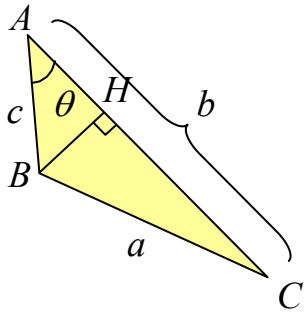
## قضیه ی کسینوسها




در هر مثلث $ABC$ مربع هر ضلع با تفاضل مجموع مربعات دو ضلع و دو برابر حاصل ضرب این دو ضلع در کسینوس زاویه ی بین آنها برابر است.

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\theta$$

اثبات: ارتفاع $BH$ وارد بر ضلع $AC$ را رسم می کنیم.آنگاه سه حالت زیر را خواهیم داشت.




حالت ۱) اگر $BH$ بر $AC$ عمود شود. داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}:\cos\theta=\frac{AH}{c}\rightarrow AH=c\cos\theta$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:c^{۲}=BH^{۲}+AH^{۲}$$

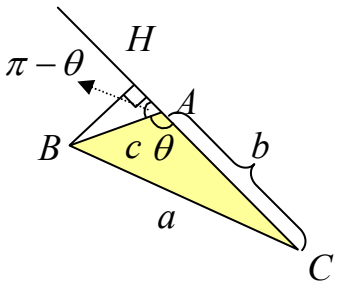
$$\overset{\Delta}{BCH}:a^{۲}=BH^{۲}+CH^{۲}\rightarrow a^{۲}=BH^{۲}+(b-AH)^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲}=\underbrace{BH^{۲}+AH^{۲}}_{c^{۲}}+b^{۲}-۲bAH=c^{۲}+b^{۲}-۲bc\cos\theta$$

حالت ۲) اگر $BH$ بر امتداد $AC$ عمود شود. داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}:\cos(\pi-\theta)=\frac{AH}{c}\rightarrow-\cos\theta=\frac{AH}{c}$$

$$\rightarrow AH=-c\cos\theta$$



www.fera.ir



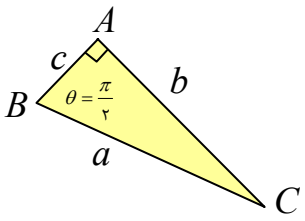
$$\overset{\Delta}{ABH}: c^2 = BH^2 + AH^2$$

$$\overset{\Delta}{BCH}: a^2 = BH^2 + CH^2 \rightarrow a^2 = BH^2 + (b + AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = \underbrace{BH^2 + AH^2}_{c^2} + b^2 + 2bAH = c^2 + b^2 - 2bc\cos\theta$$

حالت ۳) اگر $BH$ بر ضلع $AB$ منطبق باشد، پس مثلث $ABC$ قائم الزاویه است. پس :

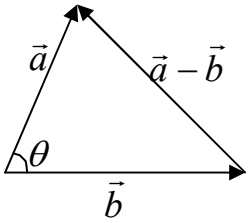
$a^2 = b^2 + c^2$ و چون $\theta = \frac{\pi}{2}$ حکم بدیهی است.

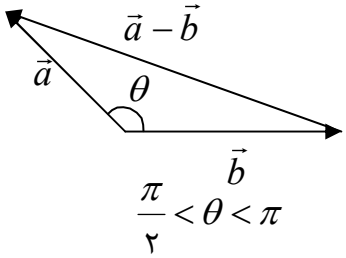


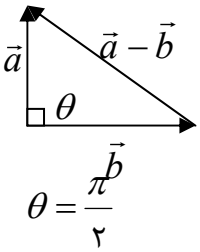

**قضیه:** اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، در این صورت

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

اثبات: طبق قضیه ی کسینوس ها داریم.




$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|Cos\theta$$

$$\rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\rightarrow (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\rightarrow -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\rightarrow -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ باشد. قضیه بدیهی است.

www.fera.ir



**ویژگی پنجم ضرب داخلی:** اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند،آنگاه

الف) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ ب) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

اثبات:

گیریم که $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ در این صورت:

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

اثبات قسمت دیگر نیز به همین صورت انجام می گیرد.

**نتیجه:**

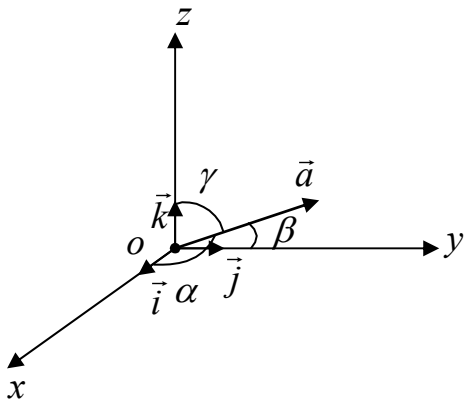
۱) اگر $\vec{d}$ و $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ چهار بردار باشند،پس:

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}).\vec{d}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{d}+\vec{b}.\vec{d}$$

۲) اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر و $\theta$ زاویه ی بین آنها باشد.در این صورت:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

بنابر این می توان زاویه ی بین هر بردار مانند $\vec{a}$ و محور های مختصات را به صورت زیر بدست آورد.




$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}.\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|}=\frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}=\frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

که در آن $\alpha$ زاویه ی بین بردار $\vec{a}$ و محور طولها در جهت مثبت آن( بردار $\vec{i}$ ) و $\beta$ زاویه ی بین بردار $a$ و محور عرضها در جهت مثبت آن( بردار $\vec{j}$ ) و همچنین $\gamma$ زاویه ی بین بردار $\vec{a}$ و محور ارتفاع ها در جهت مثبت آن( بردار $\vec{k}$ ) می باشند.

این سه زاویه را **زاویه های هادی** بردار $\vec{a}$ می نامند.

www.fera.ir



توجه داشته باشید که مثلاً در مورد اول داریم:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = \frac{a_۱(۱)+a_۲(۰)+a_۳(۰)}{|\vec{a}|\times ۱} = \frac{a_۱}{|\vec{a}|}$$

**تمرین:** اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۲)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۲)$ مطلوبست تعیین:

الف) ضرب داخلی دو بردار

ب)تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$

ج) قرینه ی بردار $\vec{a}$ نسبت به امتداد بردار $\vec{b}$

**تمرین:** اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۲)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۳)$ مطلوبست تعیین قرینه ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$ نسبت به امتداد بردار $\vec{a}+\vec{b}$

**تمرین:** نشان دهید که دو بردار $\vec{a}=(-۴,۵,۷)$ و $\vec{b}=(۱,-۲,۲)$ بر هم عمودند.

**تمرین:** زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را بیابید.

**تمرین:** کسینوس زاویه های هادی بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بدست آورید.

**تمرین:** اگر $\gamma$ و $\beta$ و $\alpha$ زاویه های هادی بردار غیر صفر $\vec{a}$ باشند.ثابت کنید که:

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma = ۱$$

حل:

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma = (\frac{a_۱}{|\vec{a}|})^۲+(\frac{a_۲}{|\vec{a}|})^۲+(\frac{a_۳}{|\vec{a}|})^۲ = \frac{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}{|\vec{a}|^۲} = \frac{|\vec{a}|^۲}{|\vec{a}|^۲} = ۱$$

**تمرین:** آیا برداری در فضا وجود دارد که با محورهای مختصات زوایای $\alpha = ۴۵$ و $\beta = ۱۳۵$ و $\gamma = ۶۰$ درجه بسازد.

جواب: خیر چنین برداری وجود ندارد.زیرا:

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma = \cos^۲ ۴۵+\cos^۲ ۱۳۵+\cos^۲ ۶۰$$
$$= (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \neq ۱$$

**تمرین:** اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار غیر صفر و $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ .آیا می توان نتیجه گرفت که: $\vec{b}=\vec{c}$؟

جواب: خیر. مثال زیر نشان می دهد که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ در حالی که $\vec{b}\neq\vec{c}$ است.

www.fera.ir



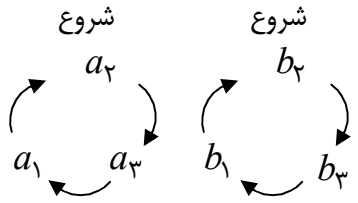
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(۱,۱,۱)\\ \vec{b}=(۲,-۱,-۱)\\ \vec{c}=(۴,-۲,-۲)\end{array}\right\}\rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c} \not\rightarrow \vec{b}=\vec{c}$$

**تمرین:** اگر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ موازی باشند و $\vec{a}=(۱,-۲,۲)$ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۵$ مختصات بردار $\vec{b}$ را تعیین کنید.

***

## ضرب خارجی دو بردار

فرض کنیم که $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند.ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را کـه بـا نمـاد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده می شود،به صورت زیر تعریف می کنیم.




مؤلفه های بردار اول بالا و مؤلفه های بردار دوم پایین قرار می گیرند.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_۲ & a_۳\\ b_۲ & b_۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_۳ & a_۱\\ b_۳ & b_۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_۱ & a_۲\\ b_۱ & b_۲\end{vmatrix}\right)$$
$$=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

**تمرین:** اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(-۱,-۲,۴)$ در این صورت بردار های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=$ ب) $\vec{b}\times\vec{a}=$ ج) $\vec{a}\times\vec{a}=$

**نتیجه:**

۱) ضرب خارجی دو بردار همواره یک بردار است.

۲) ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد.

## ویژگی های ضرب خارجی

**ویژگی اول ضرب خارجی:** برای هر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ همواره $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

اثبات:

www.fera.ir



$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=-(a_3b_2-a_2b_3,a_1b_3-a_3b_1,a_2b_1-a_1b_2)$$
$$=-(b_2a_3-b_3a_2,b_3a_1-b_1a_3,b_1a_2-b_2a_1)=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

**ویژگی دوم ضرب خارجی:** برای هر بردار $\vec{a}$ همواره $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{a}=(a_2a_3-a_3a_2,a_3a_1-a_1a_3,a_1a_2-a_2a_1)=(0,0,0)=\vec{o}$$

**ویژگی سوم ضرب خارجی:** برای هر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ هر عدد حقیقی همواره $r$

$$r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$$

اثبات:

$$r\vec{a}\times\vec{b}=(ra_1,ra_2,ra_3)\times(b_1,b_2,b_3)$$
$$=(ra_2b_3-ra_3b_2,ra_3b_1-ra_1b_3,ra_1b_2-ra_2b_1)$$
$$=r(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=r(\vec{a}\times\vec{b})$$

اثبات قسمت دوم به همین صورت انجام می شود.

**ویژگی چهارم ضرب خارجی:** برای هر سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ داریم.

الف) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$ ب) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

اثبات:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$
$$=(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2),a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3),a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1))$$
$$=((a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2),(a_3b_1-a_1b_3)+(a_3c_1-a_1c_3),$$
$$(a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1))$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)+(a_2c_3-a_3c_2,a_3c_1-a_1c_3,a_1c_2-a_2c_1)$$
$$=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$

اثبات قسمت دوم نیز به همین شکل صورت می گیرد.

www.fera.ir



**نتیجه:** برای بردار های $\vec{d}$ و $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ داریم:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{d})$$

اثبات:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{d})$$

**تمرین:** اگر $\vec{a}=(۲,۱,-۱)$ ضرب های زیر را انجام دهید.

الف) $(\vec{a}\times\vec{i})\times\vec{j}$ ب) $\vec{a}\times(\vec{i}\times\vec{j})$

**نتیجه:** ضرب خارجی دو بردار خاصیت شرکت پذیری ندارد. یعنی $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

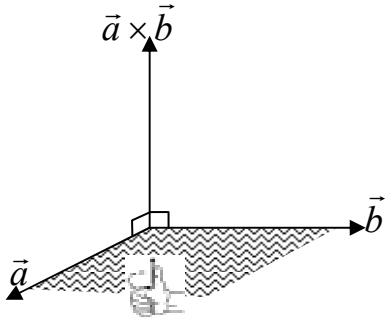
**قضیه:** فرض کنیم $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار دلخواه باشند. در این صورت

الف) $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ ب) $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$

اثبات:

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+a_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+a_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$
$$=a_۱a_۲b_۳-a_۱a_۳b_۲+a_۲a_۳b_۱-a_۲a_۱b_۳+a_۳a_۱b_۲-a_۳a_۲b_۱=۰$$

اثبات قسمت دوم به همین شکل انجام می شود.




**نتیجه:** اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار نامساوی و غیر صفر باشند، در این صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نیز غیر صفر بوده و هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است و لذا بر صفحه ی شامل $\vec{b}$ و $\vec{a}$ عمود خواهد بود.

**تمرین:** برداری پیدا کنید که بر هر دو بردار $\vec{a}=(۴,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ عمود باشد.

حل: کافی است که یکی از دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۸,۱۰,۱۴) \text{ یا } \vec{b}\times\vec{a}=(۸,-۱۰,-۱۴)$$

**تمرین:** برداری به طول واحد بیابید که بر بردار های $\vec{a}=(۱,۲,۲)$ و $\vec{b}=(-۱,۲,-۲)$ عمود باشد.

www.fera.ir



**قضیه:** برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ که زاویه ی بین آنها $\theta$ (کوچکترین زاویه ی بین آنها) است.داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

اثبات:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=(a_{۲}b_{۳}-a_{۳}b_{۲})^{۲}+(a_{۳}b_{۱}-a_{۱}b_{۳})^{۲}+(a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱})^{۲}$$

$$\rightarrow|a\times b|^{۲}=a_{۲}{}^{۲}b_{۳}{}^{۲}-۲a_{۲}a_{۳}b_{۲}b_{۳}+a_{۳}{}^{۲}b_{۲}{}^{۲}$$

$$+a_{۳}{}^{۲}b_{۱}{}^{۲}-۲a_{۱}a_{۳}b_{۱}b_{۳}+a_{۱}{}^{۲}b_{۳}{}^{۲}+a_{۱}{}^{۲}b_{۲}{}^{۲}-۲a_{۱}a_{۲}b_{۱}b_{۲}+a_{۲}{}^{۲}b_{۱}{}^{۲}$$

$$\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=(a_{۱}{}^{۲}+a_{۲}{}^{۲}+a_{۳}{}^{۲})(b_{۱}{}^{۲}+b_{۲}{}^{۲}+b_{۳}{}^{۲})-(a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+a_{۳}b_{۳})^{۲}$$

$$\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}-(\vec{a}.\vec{b})^{۲}$$

$$\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^{۲}$$

$$\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}-|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}\cos^{۲}\theta$$

$$\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}(۱-\cos^{۲}\theta)$$

$$\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}\sin^{۲}\theta\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

**ویژگی پنجم ضرب خارجی:** برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ اگر $\vec{a}$ با $\vec{b}$ موازی باشد.آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ و برعکس

اثبات:

حالت اول:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\xrightarrow{?}\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$$

$$a\,||\,b\xrightarrow{\theta=۰or\pi}\sin\theta=۰\xrightarrow{|a|\neq۰,|b|\neq۰\rightarrow|a||b|\neq۰}|a||b|\sin\theta=۰\rightarrow a\times b=o$$

حالت دوم:

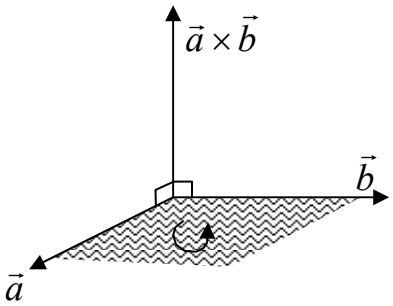
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\xrightarrow{?}\vec{a}\,||\,\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=۰\rightarrow\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|}_{\neq۰}\sin\theta=۰\rightarrow\sin\theta=۰\rightarrow\theta=۰\ \ or\ \ \pi\rightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$$

**تمرین:** نشان دهید که دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,-۳)$ و $\vec{b}=(-۳,-۶,۹)$ موازی همدیگرند.

www.fera.ir






**تذکر:** اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر موازی و غیر صفر باشند، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ نیز غیر صفر است و برصفحه ای که $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در آن قرار دارند، عمود است.به کمک دست راست اگر انگشتان دست از طرف $\vec{a}$ بـه طـرف $\vec{b}$ باشـند، انگـشت شـست در جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ قرار می گیرد. (قاعده ی دست راست)

**تمرین:** ثابت کنید که $|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}-(\vec{a}.\vec{b})^{۲}$

راهنمایی: طرف دوم را به طرف اول تبدیل کنید.

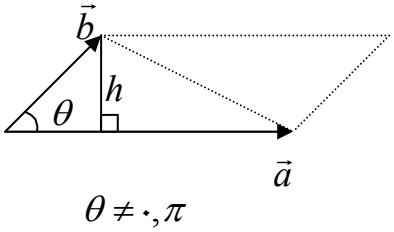
**تمرین:** اگر برای بردار های $\vec{b}$ و $\vec{a}$ داشته باشیم $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$ مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

**تمرین:** اگر $|\vec{a}|=۱۰$ و $|\vec{b}|=۲$ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ اندازه ی بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را بیابید.

***

## مساحت متوازی الاضلاع

برای هر دو بردار غیر صفر و غیر موازی $\vec{b}$ و $\vec{a}$ می توان یک متوازی الاضلاع به شکل زیر ساخت. در این صورت:




$\theta\neq ۰,\pi$

ارتفاع متوازی الاضلاع $Sin\theta=\frac{|h|}{|\vec{b}|}\rightarrow|h|=|\vec{b}|\sin\theta$

اندازه ی ارتفاع × اندازه ی قاعده = مساحت متوازی الاضلاع

$$\Rightarrow S=|\vec{a}||h|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

**نتیجه:** مساحت مثلثی که با دو بردار غیر موازی و غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ تولید می شود، برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

**تمرین:** مساحت مثلثی را حساب کنید که $A(۱,۲,۰)$ و $B(۳,۰,-۳)$ و $C(۵,۲,۶)$ سه رأس آن باشند.

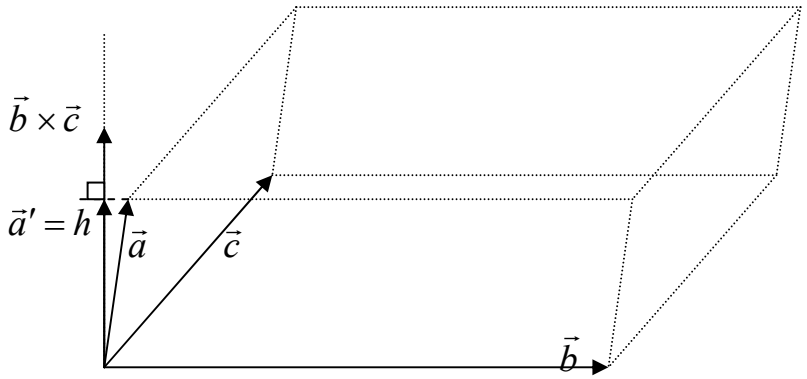
***

www.fera.ir



## حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار غیر واقع بر یک صفحه باشند. در این صورت واضح است که ارتفاع متوازی السطوح برابر تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ است. پس:




ارتفاع متوازی السطوح

$$h=\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\rightarrow|h|=\left|\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}(\vec{b}\times\vec{c})\right|=\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|^{2}}||\vec{b}\times\vec{c}|=\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$$

لذا حجم متوازی السطوح را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

حجم = اندازه ی مساحت قاعده × اندازه ی ارتفاع

$$V=|\vec{b}\times\vec{c}|\times\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

**تمرین:** اندازه ی ارتفاع و حجم متوازی السطوحی را حساب کنید که توسط بردار های $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ و $\vec{c}=(1,0,1)$ تولید می شود.

**نتیجه:** بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ روی یک صفحه واقعند، اگر و فقط اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$

اثبات: اگر بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ روی یک صفحه واقع باشند، آنگاه، حجم متوازی السطوحی که با این سه بردار ساخته می شود، برابر صفر باشد. یعنی $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=0$ لذا $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$

برعکس اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$ یعنی بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود است. از طرفی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ هم بر $\vec{b}$ و هم بر $\vec{c}$ عمود می باشد. لذا هر سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ( به دلیل هم مبدأ بودن ) روی یک صفحه واقع می باشند،

**تمرین:** نشان دهید که سه بردار $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(1,1,1)$ و $\vec{c}=(0,0,1)$ روی یک صفحه واقعند.

www.fera.ir



***

**حل چند تمرین:**

۱) اگر برای سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داشته باشیم.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o} \text{ و } |\vec{c}|=۳ \text{ و } |\vec{b}|=۲ \text{ و } |\vec{a}|=۱$$

مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\rightarrow \vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{o}\rightarrow \vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=۰\rightarrow |\vec{a}|^{۲}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=۰$$
$$\rightarrow ۱^{۲}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=۰\rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=-۱$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\rightarrow \vec{b}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}.\vec{o}\rightarrow \vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=۰\rightarrow \vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^{۲}+\vec{b}.\vec{c}=۰$$
$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b}+۲^{۲}+\vec{b}.\vec{c}=۰\rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=-۴$$

$$a+b+c=o\rightarrow c.(a+b+c)=c.o\rightarrow c.a+c.b+c.c=۰\rightarrow a.c+b.c+|c|^{۲}=۰$$
$$\rightarrow a.c+b.c+۳^{۲}=۰\rightarrow a.c+b.c=-۹$$

حال نتایج بدست آمده در هر مرحله را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=-۱\\ \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=-۴\\ \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-۹\end{array}\right\}\rightarrow ۲\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{b}.\vec{c}+۲\vec{a}.\vec{c}=-۱۴\rightarrow ۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})=-۱۴$$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=-۷$$

۲) تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۴,-۳,۲)$ را بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محور های مختصات زوایای حاده ی مساوی می سازد به دست آورید.

حل: واضح است که برداری که هر سه مؤلفه ی آن مساوی و مثبت باشند، با قسمت مثبت محور های مختصات زوایای حاده ی مساوی می سازد. مثلاً: $\vec{b}=(۱,۱,۱)$

حال تصویر $\vec{a}$ روی امتداد $\vec{b}$ بصورت زیر در می آید.

www.fera.ir



$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} = \frac{۳}{\sqrt{۳}^{۲}}(۱,۱,۱) = (۱,۱,۱) = \vec{b}$$

۳) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند. در این صورت ثابت کنید که : (نامساوی کشی- شوارتس)

$$|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

حل:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\vec{b}\cos\theta| \rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|$$

$$\xrightarrow{-۱\leq\cos\theta\leq۱\rightarrow|\cos\theta|\leq۱ \quad , \quad |\vec{a}|,|\vec{b}|\geq۰\rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\geq۰} |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \times ۱$$

$$\rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

۴) برای اعداد حقیقی $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ ثابت کنید که:

$$|a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳| \leq (\sqrt{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}})(\sqrt{b_۱^{۲} + b_۲^{۲} + b_۳^{۲}})$$

حل:

$$|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \rightarrow |a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳| \leq (\sqrt{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}})(\sqrt{b_۱^{۲} + b_۲^{۲} + b_۳^{۲}})$$

۵) برای اعداد حقیقی $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ ثابت کنید که:

$$(\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳}{۳})^{۲} \leq \frac{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}}{۳}$$

حل: اگر قرار دهیم $\vec{b} = (\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ پس:

$$|a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳| \leq (\sqrt{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}})(\sqrt{b_۱^{۲} + b_۲^{۲} + b_۳^{۲}})$$

$$\rightarrow (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳)^{۲} \leq (a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲})(b_۱^{۲} + b_۲^{۲} + b_۳^{۲})$$

$$\rightarrow (\frac{۱}{۳}a_۱ + \frac{۱}{۳}a_۲ + \frac{۱}{۳}a_۳)^{۲} \leq (a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲})(\underbrace{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹}}_{\frac{۱}{۳}})$$

$$\rightarrow (\frac{a_۱ + a_۲ + a_۳}{۳})^{۲} \leq \frac{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}}{۳}$$

www.fera.ir

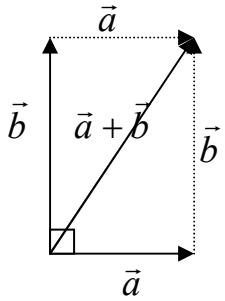


۶) اگر $x-۲y+۳z=۲$ باشد.مینیمم مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

حل: فرض کنیم که $\vec{b}=(x,y,z)$ و $\vec{a}=(۱,-۲,۳)$ طبق نامساوی کشی – شوارتس داریم.

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|\rightarrow(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲\le(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)$$
$$\rightarrow(۱)(x)+(-۲)(y)+(۳)(z))^۲\le(۱+۴+۹)(x^۲+y^۲+z^۲)$$
$$\rightarrow(x-۲y+۳z)^۲\le۱۴(x^۲+y^۲+z^۲)$$
$$\rightarrow(۲)^۲\le۱۴(x^۲+y^۲+z^۲)$$
$$\rightarrow\frac{۴}{۱۴}\le x^۲+y^۲+z^۲\rightarrow x^۲+y^۲+z^۲\ge\frac{۲}{۷}$$




۷) فرض کنید که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند. ثابت کنید $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود است، اگر و فقط اگر $|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲$ . (قضیه ی فیثاغورس)

حل: اگر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود باشد پس:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲$$
$$\xrightarrow{\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۰}|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲$$

اگر $|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲$ آنگاه داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲$$

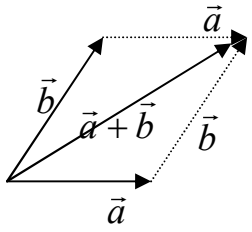
و در مقایسه با فرض می توان گفت:

$$۲\vec{a}.\vec{b}=۰\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۰\rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

www.fera.ir



۸) فرض کنید که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ را ثابت کنید.



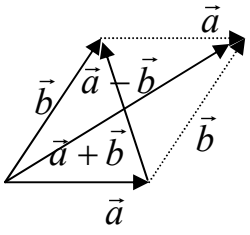

حل:

چون $\cos\theta\leq ۱$ پس $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\leq ۲|\vec{a}||\vec{b}|$ لذا می توان نوشت.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲$$
$$=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|Cos\theta\leq|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲|\vec{a}||\vec{b}|=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^۲$$
$$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

۹) فرض کنیدکه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند.ثابت کنید: $|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲$

حل:




$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲+|\vec{a}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^۲$$
$$=۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲$$

۱۰) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند و $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ غیر صفر باشند. شرط لازم و کافی برای عمود بودن $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ را پیدا کنید.

حل: شرط لازم و کافی برای عمود بودن $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ این است که $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

$$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})\rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=۰\rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=۰$$
$$\rightarrow|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲=۰\rightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|\rightarrow|\vec{a}|^۲=|\vec{b}|^۲\rightarrow|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲=۰\rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=۰$$
$$\rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=۰\rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=۰\rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$$

یعنی در یک متوازی الاضلاع قطرها بر یکدیگر عمودند، اگر و تنها اگر لوزی باشد.

www.fera.ir



۱۱) اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار غیر صفر و $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ .آیا می توان نتیجه گرفت که: $\vec{b}=\vec{c}$؟

حل: مثال زیر نشان می دهد که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ در حالی که $\vec{b}\neq\vec{c}$ است.

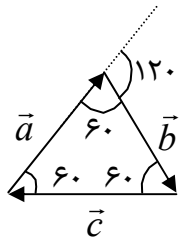
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(۱,۰,۱)\\ \vec{b}=(۱,۰,۱)\\ \vec{c}=(-۱,۰,-۱)\end{array}\right\}\rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}=(۰,۰,۰)\not\rightarrow \vec{b}=\vec{c}$$

۱۲) فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار هایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه ی $\frac{\pi}{۴}$ می سازند. مساحت مثلثی را که توسط بـردار های $\vec{a}-۲\vec{b}$ و $۳\vec{a}+۲\vec{b}$ تولید می شود، پیدا کنید.

حل:

$$(\vec{a}-۲\vec{b})\times(۳\vec{a}+۲\vec{b})=(\vec{a}\times۳\vec{a})+(\vec{a}\times۲\vec{b})+(-۲\vec{b}\times۳\vec{a})+(-۲\vec{b}\times۲\vec{b})$$
$$=(\underbrace{\vec{a}\times۳\vec{a}}_{\vec{o}})+(\vec{a}\times۲\vec{b})+(-۲\vec{b}\times۳\vec{a})+(\underbrace{-۲\vec{b}\times۲\vec{b}}_{\vec{o}})$$
$$=۲\vec{a}\times\vec{b}-۶\vec{b}\times\vec{a}=۲\vec{a}\times\vec{b}+۶\vec{a}\times\vec{b}=۸\vec{a}\times\vec{b}$$
$$\therefore S=\frac{۱}{۲}|(\vec{a}-۲\vec{b})\times(۳\vec{a}+۲\vec{b})|=\frac{۱}{۲}|۸\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}\times۸|\vec{a}\times\vec{b}|=۴\underbrace{|\vec{a}|}_{۵}\underbrace{|\vec{b}|}_{۵}\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۵۰\sqrt{۲}$$

۱۳) بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به طول واحد هستند و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=o$ انـدازه ی حاصـل ضـرب خارجی دو بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ و $۲\vec{a}-\vec{b}$ را حساب کنید.




حل: چون $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=o$ و بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به طول واحد هستند. پس زاویه ی بـین $\vec{b}$ و $\vec{a}$ برابر ۱۲۰ درجه است.

$$(۲\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+۲\vec{b})=(\underbrace{۲\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{o}})+(۲\vec{a}\times۲\vec{b})+(-\vec{b}\times\vec{a})+(\underbrace{-\vec{b}\times۲\vec{b}}_{\vec{o}})$$
$$=۴(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})=۵(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$\therefore |(۲\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+۲\vec{b})|=|۵(\vec{a}\times\vec{b})|=۵|\vec{a}\times\vec{b}|=۵\underbrace{|\vec{a}|}_{۱}\underbrace{|\vec{b}|}_{۱}\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

www.fera.ir



۱۴) عبارت زیر را ساده کنید.

$$\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

حل:

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times(\vec{j}+\vec{k})-\vec{j}\times(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\times(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\\&=(\vec{i}\times\vec{j})+(\vec{i}\times\vec{k})-(\vec{j}\times\vec{i})-(\vec{j}\times\vec{k})+(\vec{k}\times\vec{i})+(\vec{k}\times\vec{j})+(\vec{k}\times\vec{k})\\&=(\vec{i}\times\vec{j})+(\vec{i}\times\vec{k})+(\vec{i}\times\vec{j})+(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{i}\times\vec{k})+(\vec{k}\times\vec{j})+\underbrace{(\vec{k}\times\vec{k})}_{\vec{o}}\\&=۲(\vec{i}\times\vec{j})+۲(\vec{k}\times\vec{j})=۲(\vec{i}+\vec{k})\times\vec{j}\end{aligned}$$

۱۵) فرض کنید که $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار باشند و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$ .ثابت کنید که

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

حل:

$$\begin{aligned}&\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\xrightarrow{\times\vec{a}}\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{o}\\&\rightarrow\underbrace{(\vec{a}\times\vec{a})}_{\vec{o}}+(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\underbrace{\vec{a}\times\vec{o}}_{\vec{o}}\\&\rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{o}\rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})=-(\vec{a}\times\vec{c})\rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c}\times\vec{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\xrightarrow{\times\vec{b}}\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times\vec{o}\\&\rightarrow(\vec{b}\times\vec{a})+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{b})}_{\vec{o}}+(\vec{b}\times\vec{c})=\underbrace{\vec{b}\times\vec{o}}_{\vec{o}}\\&\rightarrow(\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{o}\rightarrow(\vec{b}\times\vec{a})=-(\vec{b}\times\vec{c})\\&\rightarrow-(\vec{a}\times\vec{b})=-(\vec{b}\times\vec{c})\rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\times\vec{c})\end{aligned}$$

$$\therefore\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

۱۶) فرض کنید که $\vec{d}$ و $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بردارهایی با خاصیت زیر باشند

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}\ \text{ و }\ \vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}\ .$$

ثابت کنید که اگر $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ غیر صفر باشند،آنگاه باهم موازیند.

حل:

www.fera.ir



$$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{c}\times\vec{d}}-\underbrace{\vec{a}\times\vec{c}}_{\vec{b}\times\vec{d}}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$$
$$=\vec{c}\times\vec{d}+\vec{d}\times\vec{b}-\vec{d}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d}=\vec{o}\rightarrow(\vec{a}-\vec{d})\,||\,(\vec{b}-\vec{c})$$

۱۷) فرض کنید که $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بردارهایی با خاصیت زیر باشند

$$(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{o}$$

ثابت کنید که بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در یک صفحه قرار دارند.

حل:کافی است که ثابت کنیم حجم متوازی السطوحی که با بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ساخته می شود، برابر صفر است. برای این کار دو طرف تساوی داده شده را در یکی از بردار های $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ یا $\vec{c}$ ضرب (داخلی) می کنیم.

$$(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{o}\rightarrow\vec{a}.[(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{a})]=\vec{a}.\vec{o}$$
$$\rightarrow\underbrace{\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})}_{\cdot}+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\underbrace{\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})}_{\cdot}=\underbrace{\vec{a}.\vec{o}}_{\cdot}\rightarrow\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

۱۸) فرض کنید $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بردارهایی دلخواه باشند.ثابت کنید که:

الف) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

ب) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{o}$

حل:

الف)

$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$
$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1,b_2,b_3)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1,c_2,c_3)$$
$$=((a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1,(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2,(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3)-$$
$$((a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1,(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2,(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3)$$
$$=....=a\times(b\times c)$$

ب) با توجه به قسمت الف طرف اول تساوی را تغییر می دهیم.

www.fera.ir



$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$=[(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}]+[(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}]+[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}]$$
$$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$$
$$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}+(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}=\vec{o}$$

۱۹) فرض کنید $\vec{p}$ و $\vec{q}$ و $\vec{r}$ و $\vec{s}$ بردار هـایی دلخـواه باشـند. ثابـت کنیـد کـه بـردار هـا ی $\vec{a}=\vec{p}\times\vec{s}$ و $\vec{b}=\vec{q}\times\vec{s}$ و $\vec{c}=\vec{r}\times\vec{s}$ در یک صفحه قرار دارند.

حل: حجم متوازی السطوحی را تعیین می کنیم که با بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ ساخته می شود.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{p}\times\vec{s}).[(\vec{q}\times\vec{s})\times(\vec{r}\times\vec{s})]$$

از طرفی

$$\vec{a}=\vec{p}\times\vec{s}\rightarrow\vec{a}\perp\vec{s}$$
$$\vec{b}=\vec{q}\times\vec{s}\rightarrow\vec{b}\perp\vec{s}$$
$$\vec{c}=r\times\vec{s}\rightarrow\vec{c}\perp\vec{s}$$

لذا

$$\vec{b}\parallel\vec{c}\rightarrow(\vec{q}\times\vec{s})\parallel(\vec{r}\times\vec{s})\rightarrow(\vec{q}\times\vec{s})\times(\vec{r}\times\vec{s})=\vec{o}$$
$$\rightarrow(\vec{p}\times\vec{s}).[(\vec{q}\times\vec{s})\times(\vec{r}\times\vec{s})]=(\vec{p}\times\vec{s}).\vec{o}=۰$$

و چون حجم متوازی السطوح برابر صفر شد، پس سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در یک صفحه قرار دارند.

***

www.fera.ir

# آموزش

## هندسه ی تحلیلی و جبرخطی

دوره ی پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

فصل دوم : خط و صفحه در فضا

تهیه کننده: جابر عامری

**دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

**www.mathtower.org**

مهر ۱۳۸۹

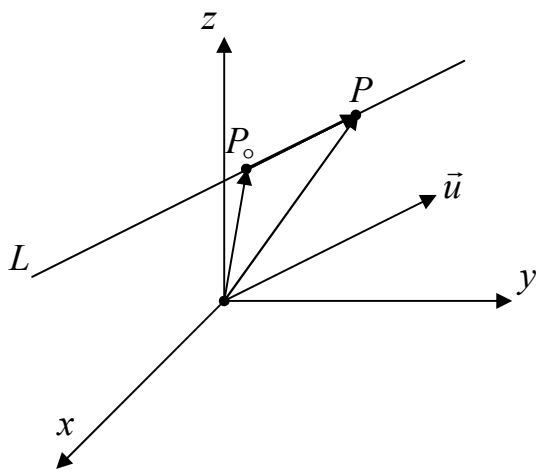
www.fera.ir



**باسمه تعالی**

## فصل دوم: معادلات خط و صفحه در فضا

### الف) خط در فضا




اگـر $P_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نقطـه ی معلـومی از خـط $L$ و بـردار ناصـفر $\vec{u}=(p,q,r)$ که موازی با $L$ باشد را به طور منحـصر بفـرد داشـته باشیم. در این صورت معادله ی خط $L$ را می توان به شکل زیر نوشت:

با فرض اینکه $P(x,y,z)$ نقطه ی دلخواهی از خط $L$ باشـد، پـس پیکان $\overrightarrow{P_\circ P}$ و بردار $\vec{u}$ با هم موازی هستند. لذا یک عدد حقیقی مانند $t$ وجود دارد که:

$$\overrightarrow{P_\circ P}=t\vec{u}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_\circ}=t\vec{u}$$

$$\rightarrow (x-x_\circ, y-y_\circ, z-z_\circ)=t(p,q,r)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-x_\circ=tp \rightarrow x=x_\circ+pt \\ y-y_\circ=tq \rightarrow y=y_\circ+qt \quad t\in R \\ z-z_\circ=tr \rightarrow z=z_\circ+rt \end{cases}$$

این شکل از معادلات خط به ***معادلات پارامتری*** موسوم هستند که در آن عدد حقیقی $t$ پارامتر نامیده می شود. بردار $\vec{u}$ کـه مـوازی خط $L$ است را بردار هادی خط $L$ می نامند.

در واقع به ازاء هر $t$ یک نقطه از خط $L$ بدست می آید و برعکس هـر نقطـه از خـط $L$ بـه ازاء یـک $t$ در معادلـه ی فـوق صـدق می کند. وقتی $t$ در $R$ تغییر می کند، تمام نقاط خط $L$ بوجود می آیند.

**تمرین:** معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه ی $P_\circ(۲,-۴,۱)$ می گذرد و موازی با بردار $\vec{u}=(۳,۲,-۱)$ باشد .

توجه کنید که در معادلات پارامتری یک خط می توان به طریق زیر پارامتر را حذف کرد.

www.fera.ir



$$\begin{cases} x-x_{\circ}=pt \rightarrow t=\dfrac{x-x_{\circ}}{p} \\ y-y_{\circ}=qt \rightarrow t=\dfrac{y-y_{\circ}}{q} \\ z-z_{\circ}=rt \rightarrow t=\dfrac{z-z_{\circ}}{r} \end{cases} \rightarrow \frac{x-x_{\circ}}{p}=\frac{y-y_{\circ}}{q}=\frac{z-z_{\circ}}{r}$$

این شکل از معادلات خط به ***معادلات متقارن*** معروف هستند.

**تمرین:** با توجه به تمرین قبل معادلات متقارن خط را بنویسید.

**تمرین:** معادلات متقارن خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $P_{۱}(۴,-۶,۵)$ و $P_{۲}(۲,-۳,۰)$ می گذرد.

**تذکر:** معادله ی فوق برای حالتی است که $p$ و $q$ و $r$ صفر نباشند ولی اگر یکی از این سه عدد صفر باشد، این معادله بـه یکـی از شکل های زیر در خواهد آمد.

اگر $p=۰$ باشد.

$$\begin{cases} x=x_{\circ} \\ \dfrac{y-y_{\circ}}{q}=\dfrac{z-z_{\circ}}{r} \end{cases}$$

اگر $q=۰$ باشد.

$$\begin{cases} y=y_{\circ} \\ \dfrac{x-x_{\circ}}{p}=\dfrac{z-z_{\circ}}{r} \end{cases}$$

اگر $r=۰$ باشد.

$$\begin{cases} z=z_{\circ} \\ \dfrac{x-x_{\circ}}{p}=\dfrac{y-y_{\circ}}{q} \end{cases}$$

حال اگر دو عدد از سه عدد $p$ و $q$ و $r$ صفر باشند، معادله ی متقارن به صورتی نوشته می شود که متغیر متناظر بـا مؤلفـه ی غیـر صفر نداشته باشد. (یعنی متغیر متناظر با مؤلفه ی غیر صفر عدد حقیقی فرض می شود.)

اگر $p,q=۰$ باشد.

$$\begin{cases} x=x_{\circ} \\ y=y_{\circ} \end{cases}$$

www.fera.ir



اگر $p,r=۰$ باشد.

$$\begin{cases} x=x_۰ \\ z=z_۰ \end{cases}$$

اگر $q,r=۰$ باشد.

$$\begin{cases} y=y_۰ \\ z=z_۰ \end{cases}$$

**تمرین:** معادلات متقارن خطی را بنویسیدکه از نقطه ی $P_۰(-۲,-۲,۱)$ بگذرد و موازی با بردار $\vec{u}=(۰,۲,-۳)$ باشد.

حل:

$$\begin{cases} x=-۲ \\ \dfrac{y+۲}{۲}=\dfrac{z-۱}{-۳} \end{cases}$$

**تمرین:** معادلات متقارن خطی را بنویسیدکه از دو نقطه ی $P_۱(۲,۳,-۱)$ و $P_۲(۲,۳,۴)$ می گذرد.

حل:

$$\vec{u}=\overrightarrow{P_۱P_۲}=(۲-۲,۳-۳,۴+۱)=(۰,۰,۵)$$

$$\begin{cases} x=۲ \\ y=۳ \end{cases}$$

**تمرین:** معادلات خطی را بنویسید که از نقطه ی $P_۰(-۲,۳,۱)$ بگذرد و عمود بر صفحه ی $yz$ باشد.

حل: چون خط عمود بر صفحه ی $yz$ است، پس با محور $x$ ها موازی است. لذا

$$\vec{u}=\vec{i}=(۱,۰,۰)$$

$$\rightarrow \begin{cases} y=۳ \\ z=۱ \end{cases}$$

**تمرین:** معادلات دسته خطی را بنویسید که از نقطه ی $P_۰(-۲,۳,۱)$ بگذرد و موازی با صفحه ی $yz$ باشد.

حل: چون خط موازی با صفحه ی $yz$ است، پس بر محور $x$ ها عمود است. لذا

$$\vec{u}=(۰,q,r)$$

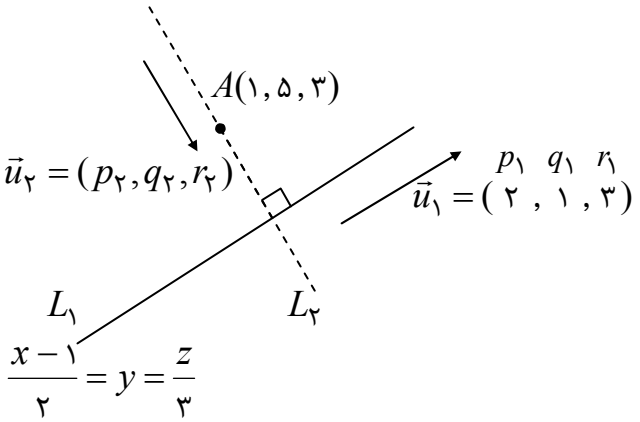
www.fera.ir



$$\rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ y = ۳ + qt \\ z = ۱ + rt \end{cases}$$

**تمرین:** معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(۱,۵,۳)$ بگذرد و بر خط $\frac{x-۱}{۲} = y = \frac{z}{۳}$ عمود باشد.

حل:

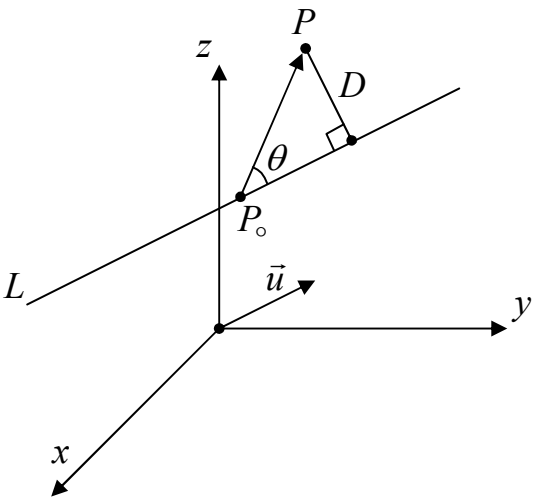



$$L_۱ \perp L_۲ \rightarrow \vec{u}_۱ \perp \vec{u}_۲ \rightarrow \vec{u}_۱ . \vec{u}_۲ = ۰ \rightarrow ۲p_۲ + q_۲ + ۳r_۲ = ۰ \rightarrow \vec{u}_۲ = (p_۲\ q_۲\ r_۲) = (-۲\ ,\ ۱\ ,\ ۱)$$

$$\rightarrow L_۲ : \frac{x-x_۰}{p_۲} = \frac{y-y_۰}{q_۲} = \frac{z-z_۰}{r_۲} \rightarrow L_۲ : \frac{x-۱}{-۲} = \frac{y-۵}{۱} = \frac{z-۳}{۱}$$

***

**فاصله ی یک نقطه از یک خط**




**قضیه:** فرض کنیم $L$ خطی باشد که با بردار غیر صفر $\vec{u}$ موازی است و $P$ را نقطه ای در نظر بگیریم که خارج (یا روی) $L$ قرار دارد. در این صورت فاصله ی نقطه ی $P$ از خط $L$ یعنی $D$ برابر است با:

$$D = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{P_۰P}|}{|\vec{u}|}$$

که در آن $P_۰$ نقطه ی دلخواهی از خط $L$ است.

اثبات: لازم نیست.

www.fera.ir



**تمرین:** فاصله ی نقطه ی $P(۵,-۶,۲)$ را از خط $L$ به معادلات پارامتری زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ + ۴t \\ z = ۲ - ۳t \end{cases}$$

حل: نقطه ی $P_۰(۱,-۱,۲)$ را روی خط $L$ در نظر می گیریم. بردار $\vec{u} = (۰,۴,-۳)$ موازی $L$ است. پس:

$$\overrightarrow{P_۰P} = (۵-۱,-۶+۱,۲-۲) = (۴,-۵,۰)$$

$$\vec{u} \times \overrightarrow{P_۰P} = (-۱۵,-۱۲,-۱۶)$$

$$|\vec{u} \times \overrightarrow{P_۰P}| = \sqrt{(-۱۵)^۲ + (-۱۲)^۲ + (-۱۶)^۲} = \sqrt{۶۲۵} = ۲۵$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(۰)^۲ + (۴)^۲ + (-۳)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

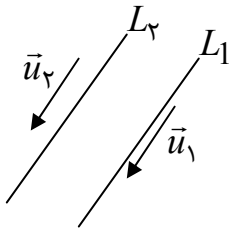
$$\therefore D = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{P_۰P}|}{|\vec{u}|} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

***

**وضعیت نسبی دو خط در فضا**

می دانیم که در حالت کلی دو خط در فضا یکی از سه وضعیت نسبی موازی ، متقاطع یا متنافر را دارند. حال اگر $L_۱$ و $L_۲$ دو خط متمایز باشند که به ترتیب با بردار های $\vec{u}_۱ = (p_۱,q_۱,r_۱)$ و $\vec{u}_۲ = (p_۲,q_۲,r_۲)$ موازی باشند. حالت های زیر را می توان بررسی کرد.

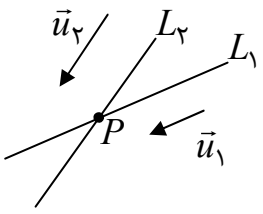
الف) اگر بردار های $\vec{u}_۱$ و $\vec{u}_۲$ موازی باشند، پس خط های $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند و برعکس. به عبارتی دیگر وجود دارد $\lambda \in R$ بطوری که :




$$\vec{u}_۱ = \lambda \vec{u}_۲ \leftrightarrow (p_۱,q_۱,r_۱) = \lambda(p_۲,q_۲,r_۲) \leftrightarrow \begin{cases} p_۱ = \lambda p_۲ \\ q_۱ = \lambda q_۲ \\ r_۱ = \lambda r_۲ \end{cases}$$

**توجه:** توازی دو خط را می توان از ضرب خارجی بردار های هادی آنها نیز بررسی کرد. به عبارت دیگر:

$$L_۱ \parallel L_۲ \leftrightarrow \vec{u}_۱ \parallel \vec{u}_۲ \leftrightarrow \vec{u}_۱ \times \vec{u}_۲ = o$$




ب) اگر دو خط یک نقطه ی مشترک منحصر بفرد دارند،آنگاه متقاطعند.

ج) اگر دو خط نه موازی و نه متقاطع باشند،آنگاه متنافرند.

www.fera.ir



**تمرین:** نشان دهید که دو خط به معادلات زیر موازی هستند.

$$L_۱ : \frac{x-۱}{-۲} = \frac{y+۱}{۱} = \frac{z-۱}{۲} \quad \text{و} \quad L_۲ : x = -۲y = -z + ۱$$

حل: واضح است که:

$$L_۱ : \frac{x-۱}{-۲} = \frac{y+۱}{۱} = \frac{z-۱}{۲} \to \vec{u}_۱ = (-۲, ۱, ۲)$$

$$L_۲ : x = -۲y = -z + ۱ \to \frac{x-۰}{۱} = \frac{y-۰}{\frac{-۱}{۲}} = \frac{z-۱}{-۱} \to \vec{u}_۲ = (۱, -\frac{۱}{۲}, -۱)$$

$$\to \vec{u}_۱ = -۲\vec{u}_۲ \to \vec{u}_۱ \parallel \vec{u}_۲ \to L_۱ \parallel L_۲$$

***

**تمرین:** نقطه ی مشترک دو خط به معادلات زیر را تعیین کنید.

$$L_۱ : \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۲}{-۱} \quad \text{و} \quad L_۲ : \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{-۲} = \frac{z}{۲}$$

حل: معادله ی یکی از خط ها (مثلاً $L_۱$) را به صورت پارامتری نوشته و در معادله ی خط دیگر قرار می دهیم.

$$L_۱ : \begin{cases} x = ۲ + ۲t \\ y = -۲ + t \\ z = ۲ - t \end{cases}$$

در معادله ی خط $L_۲$ قرار می دهیم:

$$\frac{(۲+۲t)-۱}{۱} = \frac{(-۲+t)}{-۲} = \frac{(۲-t)}{۲} \to \begin{cases} ۲t+۱ = \frac{(-۲+t)}{-۲} \to t = ۰ \\ \frac{(-۲+t)}{-۲} = \frac{(۲-t)}{۲} \to t = ۰ \end{cases} \to t = ۰ (*)$$

پس دو خط $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند. حال اگر مقدار $t$ بدست آمده را در یکی از معادله ها (مثلاً $L_۱$) قرار دهیم، نقطه ی مشترک بدست می آید.

$$P(۲, -۲, ۲)$$

**توجه:** اگر معادلات دستگاه $(*)$ جواب یکسان و منحصر بفرد برای $t$ نداشته باشد، دو خط متقاطع نیستند.

**تمرین:** وضع نسبی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات زیر را تعیین کنید.

www.fera.ir



$$L_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad \text{و} \quad L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

حل: واضح است که $\vec{u}_1 = (2,-1,1)$ و $\vec{u}_2 = (1,2,3)$ پس $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ موازی نیستند، لذا دو خط موازی نیستند.

از طرفی

$$L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad t \in R$$

در معادله ی خط $L_1$ قرار می دهیم.

$$\frac{t+1}{2} = \frac{2t}{-1} = \frac{3t+2}{1} \rightarrow t = -\frac{1}{5} \quad , \quad t = -\frac{2}{5}$$

یعنی این معادلات دارای جواب یکسان نیستند و لذا دو خط $L_1$ و $L_2$ متقاطع نیستند.

و چون دو خط $L_1$ و $L_2$ نه موازی و نه متقاطع می باشند، پس متنافر هستند.

**چند تمرین:**

**تمرین۱)** معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه ی $(3,-1,2)$ بگذرد و با خط $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = z$ موازی باشد.

**تمرین۲)** معادلات پارامتری خط گذرا از نقاط $(-2,5,7)$ و $(-1,1,0)$ را بنویسید.

**تمرین۳)** نشان دهید که خط گذرا از نقاط $(0,0,5)$ و $(1,-1,4)$ بر خط به معادله ی زیر عمود است.

$$\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+9}{3}$$

**تمرین۴)** فاصله ی نقطه ی $(4-,0,5)$ از خط به معادله ی $x-1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ را پیدا کنید.

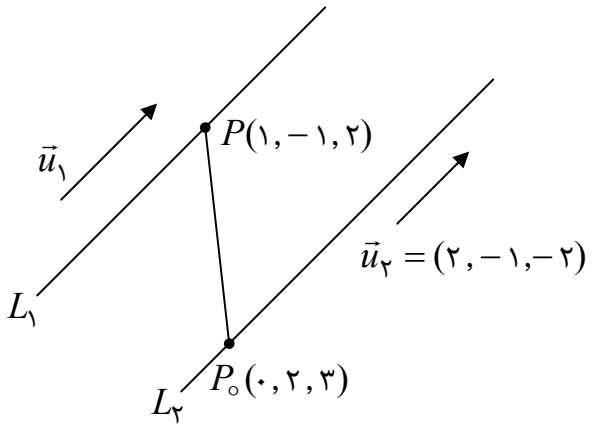
**تمرین۵)** فاصله ی دو خط موازی به معادلات زیر را بیابید.

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{و} \quad L_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$$

حل: کافی است یک نقطه روی یکی از خط ها مثلاً $L_1$ پیدا کرده و فاصله ی آنرا تا خط دیگر بدست آوریم.

www.fera.ir






$$\overrightarrow{P_0P}=(1,-3,-1)$$

$$\vec{u}_2\times\overrightarrow{P_0P}=(-5,0,-5)$$

$$|\vec{u}_2\times\overrightarrow{P_0P}|=\sqrt{(5)^2+(0)^2+(5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$|\vec{u}_2|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\therefore D=\frac{|\vec{u}_2\times\overrightarrow{P_0P}|}{|\vec{u}_2|}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

**تمرین۶)** زاویه ی بین دو خط به معادلات زیر کدام است؟

$$L_1:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-t\end{cases}\qquad \text{و}\qquad L_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$$

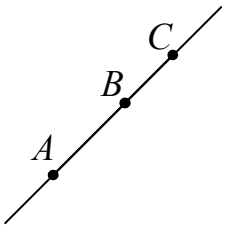
الف) ۳۰ ب)۹۰ ج) ۶۰ د)۰

حل: زاویه ی بین دو خط با زاویه ی بین بردار های هادی آنها برابر است.

$$\left.\begin{array}{l}Cos\theta=\dfrac{\vec{u}_1.\vec{u}_2}{|\vec{u}_1||\vec{u}_2|}\\ \vec{u}_1=(2,1,-1)\\ \vec{u}_2=(1,-1,1)\end{array}\right\}\rightarrow Cos\theta=\frac{0}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=0\rightarrow\vec{u}_1\perp\vec{u}_2\rightarrow L_1\perp L_2$$

**تمرین۷)** مقدار $b$ و $a$ را تعیین کنید تا نقطه ی $(a,b,1)$ روی خط گذرا از نقاط $(2,5,7)$ و $(0,3,2)$ قرار گیرد.

حل: ابتدا معادله ی خط گذرا از دو نقطه ی $C$ و $B$ را می نویسیم، سپس مختصات نقطه ی $A$ را در آن جایگزین می کنیم.




$A(a,b,1)$

$B(2,5,7)$

$C(0,3,2)$

www.fera.ir



$$\vec{u}=\overrightarrow{BC}=\overset{p}{(۲}\ ,\overset{q}{۲}\ ,\overset{r}{۵)}$$

$$C\overset{x_۰}{(}\ ۰\ ,\overset{y_۰}{۳}\ ,\overset{z_۰}{۲}\ )$$

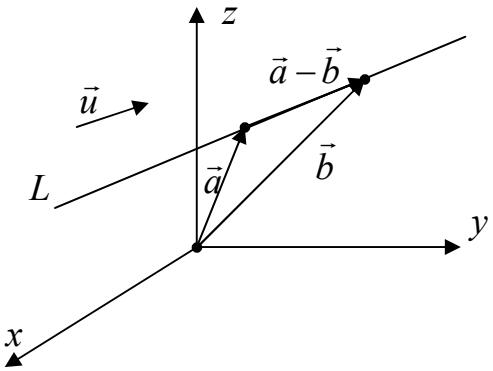
$$L:\frac{x}{۲}=\frac{y-۳}{۲}=\frac{z-۲}{۵}\xrightarrow{A(a,b,۱)}\frac{a}{۲}=\frac{b-۳}{۲}=\frac{۱-۲}{۵}\rightarrow\begin{cases}\frac{a}{۲}=-\frac{۱}{۵}\rightarrow a=-\frac{۲}{۵}\\ \frac{b-۳}{۲}=-\frac{۱}{۵}\rightarrow b=\frac{۱۳}{۵}\end{cases}$$

***

**تمرین۸)** بردار $\vec{u}$ که موازی خط $L$ است را در نظر می گیریم. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار هایی باشند که از مبدأ مختصات شروع شوند و انتهای آنها روی $L$ است.

نشان دهید که:

$$\vec{u}\times\vec{a}=\vec{u}\times\vec{b}$$




حل: چون انتهای بردار های $\vec{a}$و $\vec{b}$ روی خط $L$ است. پس:

$$(\vec{a}-\vec{b})\,\|\,\vec{u}\rightarrow\vec{u}\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{o}\rightarrow\vec{u}\times\vec{a}-\vec{u}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow\vec{u}\times\vec{a}=\vec{u}\times\vec{b}$$

**تمرین۹)** فاصله ی مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطه ی $(۳\ ,-۳\ ,-۳)$و موازی بردار $(۴\ ,-۲\ ,-۴)$ را پیدا کنید.

حل: ابتدا خط گذرا از نقطه ی $(۳\ ,-۳\ ,-۳)$که موازی بردار $(۴\ ,-۲\ ,-۴)$باشد را نوشته و سپس فاصله ی مبدأ مختصات را تا خط بدست آمده را تعیین می کنیم.

$$\vec{u}=\overset{p}{(۴}\ ,\overset{q}{-۲}\ ,\overset{r}{-۴}),P_{\circ}\overset{x_۰}{(-۳}\ ,\overset{y_۰}{-۳}\ ,\overset{z_۰}{۳}\ )\rightarrow L:\begin{cases}x=-۳+۴t\\ y=-۳-۲t\\ z=۳-۴t\end{cases}$$

www.fera.ir



$P(۰,۰,۰)$

$\vec{P_۰P} = (-۳,-۳,۳)$

$\vec{u} \times \vec{P_۰P} = (۱۸,۰,-۱۸)$

$|\vec{u} \times \vec{P_۰P}| = \sqrt{(۱۸)^۲ + (۰)^۲ + (-۱۸)^۲} = ۱۸\sqrt{۲}$

$|\vec{u}| = \sqrt{(۴)^۲ + (-۲)^۲ + (-۴)^۲} = ۶$

$\therefore D = \frac{|\vec{u} \times \vec{P_۰P}|}{|\vec{u}|} = \frac{۱۸\sqrt{۲}}{۶} = ۳\sqrt{۲}$

**تمرین۱۰)** فاصله ی نقطه ی $(۲,۱,۰)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$\begin{cases} x = -۲ \\ y + ۱ = z \end{cases}$$

حل:

$P(۲,۱,۰)$ , $P_۰(-۲,۱,۲)$

$\vec{u} = (۰,۱,۱)$

$\vec{P_۰P} = (۴,۰,-۲)$

$\vec{u} \times \vec{P_۰P} = (-۲,۴,-۴)$

$|\vec{u} \times \vec{P_۰P}| = \sqrt{(-۲)^۲ + (۴)^۲ + (-۴)^۲} = ۶$

$|\vec{u}| = \sqrt{(۰)^۲ + (۱)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۲}$

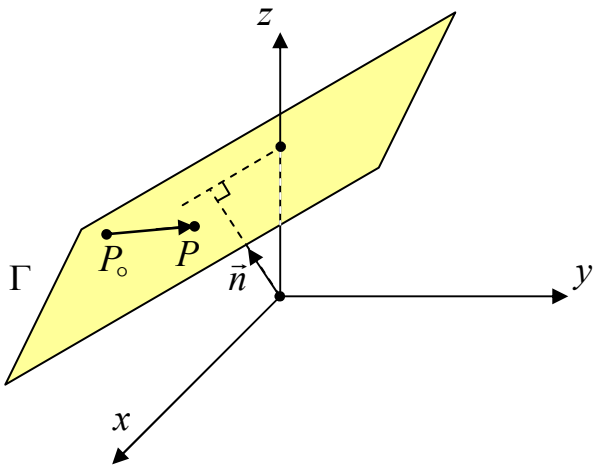
$\therefore D = \frac{|\vec{u} \times \vec{P_۰P}|}{|\vec{u}|} = \frac{۶}{\sqrt{۲}}$

***

www.fera.ir



**ب) صفحه در فضا**




هر صفحه در فضای $R^3$ با یک نقطه روی آن و یک بردار که بـر آن صفحه عمود است مشخص می شود.

اگـر $P_\circ(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ یـک نقطـه از صـفحه و بـردار غیـر صفر $\vec{n}=(a,b,c)$ عمود بر آن صفحه باشد و $P(x,y,z)$ نقطه ی دلخواهی از آن فرض شود. آنگاه داریم.

$$P_\circ P=(x-x_\circ\,,\,y-y_\circ\,,\,z-z_\circ)$$

$$\vec{n}\perp \vec{P_\circ P}\rightarrow \vec{n}.\vec{P_\circ P}=\circ\rightarrow a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$$
$$\rightarrow ax-ax_\circ+by-by_\circ+cz-cz_\circ=\circ$$
$$\rightarrow ax+by+cz=\underbrace{ax_\circ+by_\circ+cz_\circ}_{d}$$
$$\rightarrow ax+by+cz=d$$

بردار $\vec{n}$ را بردار نرمال صفحه ی $\Gamma$ می نامند.

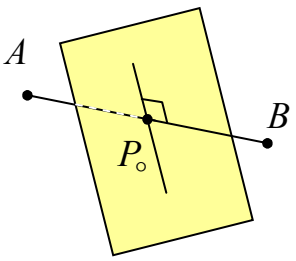
معادله ی صفحه در حالت کلی $a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$

**تمرین:** معادله ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه ی $A(۲\,,\,۳\,,-۱)$ گذشته و بر بردار $\vec{n}=۳\vec{i}-۲\vec{j}+۵\vec{k}$ عمود باشد.

**تمرین:** معادله ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه ی $A(-۳\,,۲\,,۱)$ گذشته و بر خط بردار $\frac{x}{۳}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۳}{-۱}$ عمود باشد.

**تمرین:** معادله ی صفحه ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه ی $B(۳\,,۵\,,۴)$ و $A(۵\,,۱\,,۲)$ را بنویسید.

حل:




$$\vec{n}=\vec{AB}=(-۲\,,۴\,,۲)$$

$P_\circ(۴\,,۳\,,۳)$ نقطه ی وسط پاره خط $AB$

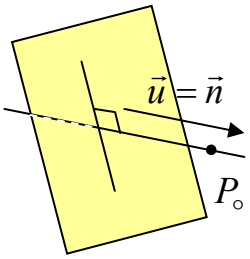
$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ$$
$$\rightarrow -۲(x-۴)+۴(y-۳)+۲(z-۳)=\circ\rightarrow -۲x+۴y+۲z=۱\circ$$

www.fera.ir



**تمرین:** معادله ی خط گذرا از نقطه ی $(۲,-۱,۰)$ و عمود بر صفحه ی $۲x-۳y+۴z=۵$ را پیدا کنید.

حل:

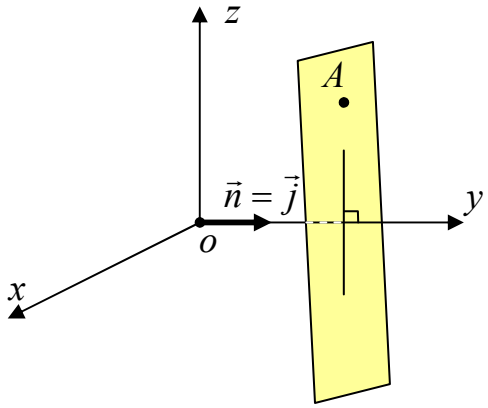



$$\vec{u}=\vec{n}=(۲,-۳,۴)$$

$$P_\circ(۲,-۱,۰)$$

$$\therefore \quad \frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{-۳}=\frac{z}{۴}$$

**تمرین:** معادله ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه ی $A(۱,۲,۳)$ بگذرد و بر محور $oy$ عمود باشد.

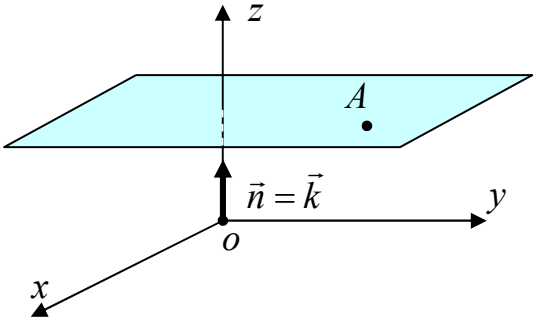



حل: $\vec{n}=\vec{j}=(۰,۱,۰)$

$$A(۱,۲,۳)$$

$$\therefore \quad y=۲$$

**تمرین:** معادله ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه ی $A(۱,۲,۳)$ بگذرد و موازی صفحه ی $xy$ باشد.




حل:

$$\vec{n}=\vec{k}=(۰,۰,۱)$$

$$A(۱,۲,۳)$$

$$\therefore \quad z=۳$$

**تمرین:** معادله ی صفحه ای را بنویسید که از نقاط $A(۲,۳,-۱)$ و $B(۰,۱,۱)$ بگذرد و موازی محور طولها باشد.

حل: بردار $\vec{n}$ بر محور طولها عمود است پس $a=۰$ و همچنین بردار $\vec{n}=(۰,b,c)$ بر بردار $\overrightarrow{AB}=(۲-۰,۳-۱,-۱-۱)$ عمود است پس: $۰(۲)+b(۲)+c(-۲)=۰\Rightarrow b=c$ لذا بردار نرمال صفحه بصورت $\vec{n}=(۰,۱,۱)$ می باشد و لذا داریم:

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰$$

$$\rightarrow ۰(x-۰)+۱(y-۱)+۱(z-۱)=۰\rightarrow \quad y+z=۲$$ معادله ی صفحه

www.fera.ir

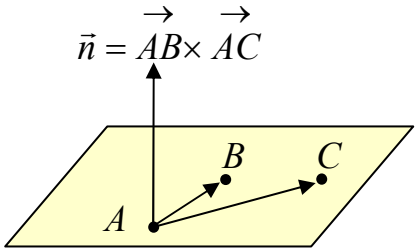


**نتیجه:** معادله ی صفحه در حالت های خاص

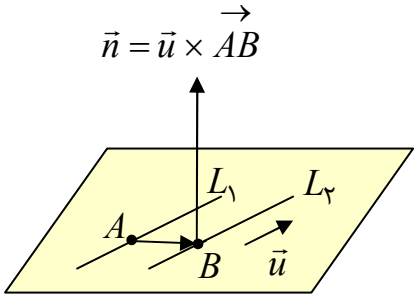
| حالت | معادله |
|---|---|
| معادله ی صفحه ای که از مبدأ مختصات می گذرد. | $ax+by+cz=0$ |
| معادله ی صفحه موازی صفحه ی $xy$ (عمود بر محور $z$ ها) | $cz=d$ |
| معادله ی صفحه موازی صفحه ی $yz$ (عمود بر محور $x$ ها) | $ax=d$ |
| معادله ی صفحه موازی صفحه ی $xz$ (عمود بر محور $y$ ها) | $by=d$ |
| معادله ی صفحه ی موازی محور $x$ ها | $by+cz=d$ |
| معادله ی صفحه ی موازی محور $y$ ها | $ax+cz=d$ |
| معادله ی صفحه ی موازی محور $z$ ها | $ax+by=d$ |

**تعیین معادله ی صفحه در حالت های مختلف**

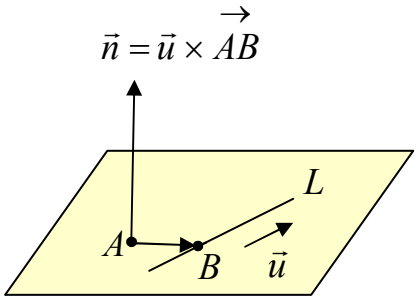
برای تعیین معادله ی صفحه باید مختصات یک نقطه روی آن صفحه و بردار نرمال را داشته باشیم.بنابراین در حالت های زیر معادله ی صفحه را با تعیین بردار نرمال مشخص می کنیم.




**حالت اول:** تعیین معادله ی صفحه با معلوم بودن سه نقطه ی متمایز و غیر واقع بر یک خط راست روی آن




**حالت دوم:** تعیین معادله ی صفحه با معلوم بودن دو خط موازی و غیر منطبق روی آن

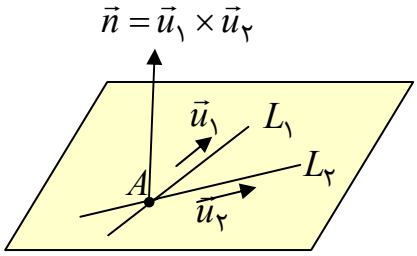



**حالت سوم:** تعیین معادله ی صفحه با معلوم بودن یک خط و یک نقطه بیرون آن روی صفحه

www.fera.ir



**حالت چهارم:** تعیین معادله ی صفحه با معلوم بودن دو خط متقاطع روی آن




**تمرین:** معادله ی صفحه ای را بنویسید که از نقاط $A(1,0,2)$ و $B(-1,3,4)$ و $C(3,5,7)$ بگذرد.

**تمرین:** معادله ی صفحه ی شامل دو خط به معادلات زیر را بدست آورید.

$$L_1: x=y-1=\frac{z}{2} \quad \text{و} \quad L_2: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$$

حل: واضح است که دو خط داده شده موازیند.پس:

$$A\in L_1 \rightarrow A(0,1,0)$$

$$B\in L_2 \rightarrow B(1,2,1)$$

$$\vec{u}=(1,1,2) \quad , \quad \overrightarrow{AB}=(1,1,1)$$

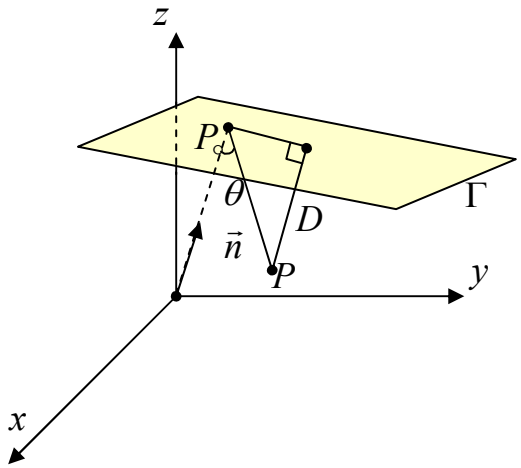
$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$$

$$P_0=A(0,1,0)$$

$$\Rightarrow -1(x-0)+1(y-1)+0(z-0)=0\rightarrow -x+y=1$$

***

**فاصله ی یک نقطه از یک صفحه**




**قضیه:** فرض کنیم $\Gamma$ صفحه ای باشد که بر بردار غیر صفر $\vec{n}$ عمود است و $P$ را نقطه ای در نظر بگیریم که خارج (یا روی) $\Gamma$ قرار دارد. در این صورت فاصله ی نقطه ی $P$ از صفحه ی $\Gamma$ یعنی $D$ برابر است با:

$$D=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_0P}|}{|\vec{n}|}$$

که در آن $P_0$ نقطه ی دلخواهی از صفحه است.

اثبات لازم نیست.

www.fera.ir



**تمرین:** فاصله ی نقطه ی $P(۰, ۲, ۱)$ را از صفحه ی $\Gamma$ به معادله ی $x + y + \sqrt{۲}z + ۲ - \sqrt{۲} = ۰$ بدست آورید.

حل:

$$P_۰ \in \Gamma \rightarrow P_۰(\sqrt{۲}, -۲, ۰)$$

$$\vec{n} = (۱, ۱, \sqrt{۲}) \qquad \vec{P_۰P} = (-\sqrt{۲}, ۴, ۱)$$

$$\vec{n}.\vec{P_۰P} = ۱(-\sqrt{۲}) + ۴(۱) + ۱(\sqrt{۲}) = ۴$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{۱ + ۱ + ۲} = ۲$$

$$D = \frac{|\vec{n}.\vec{P_۰P}|}{|\vec{n}|} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

**نتیجه:** فاصله ی نقطه ی $P(x_۱, y_۱, z_۱)$ از صفحه ی $\Gamma$ به معادله ی $ax + by + cz = d$ به صورت زیر است.

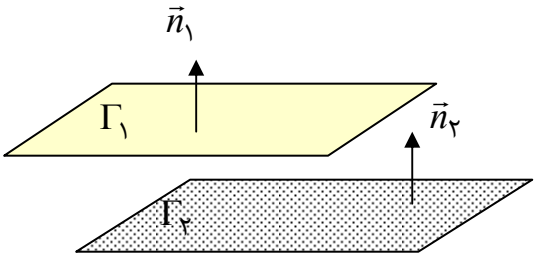
$$D = \frac{|ax_۱ + by_۱ + cz_۱ - d|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

**تمرین:** تمرین قبل را به کمک این نتیجه حل کنید.

***

**وضعیت نسبی دو صفحه در فضا**

واضح است که در فضا دو صفحه یا موازی یا متقاطع هستند. حال می توان نوشت:




الف) اگر $\vec{n}_۱$ و $\vec{n}_۲$ موازی باشند،آنگاه دو صفحه ی $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی هستند و برعکس

به عبارتی دیگر وجود دارد $\lambda \in R$ بطوری که :

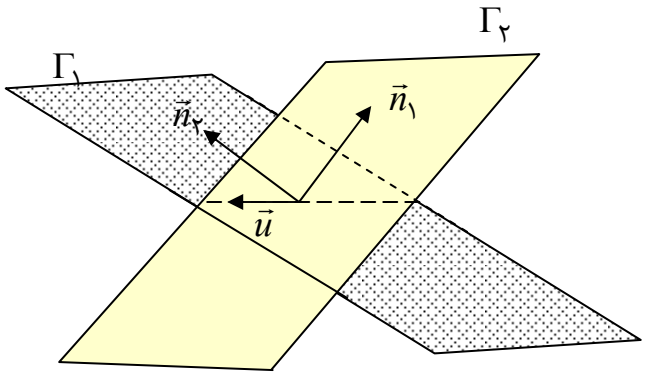
$$\vec{n}_۱ = \lambda\vec{n}_۲ \leftrightarrow (a_۱, b_۱, c_۱) = \lambda(a_۲, b_۲, c_۲) \leftrightarrow \begin{cases} a_۱ = \lambda a_۲ \\ b_۱ = \lambda b_۲ \\ c_۱ = \lambda c_۲ \end{cases}$$

**توجه:** توازی دو صفحه را می توان از ضرب خارجی بردار های نرمال آنها نیز بررسی کرد.به عبارت دیگر:

$$\Gamma_۱ \parallel \Gamma_۲ \leftrightarrow \vec{n}_۱ \parallel \vec{n}_۲ \leftrightarrow \vec{n}_۱ \times \vec{n}_۲ = \vec{o}$$

www.fera.ir






ب) در صورتی که دو صفحه متقاطع باشند، فصل مشترک آنها یک خط خواهد بود. این خط با برداری که بر $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ عمود است، موازی می باشد.لذا با ضرب خارجی $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ موازی است.

**نکته۱:** اگر $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ بر هم عمود باشند، دو صفحه بر هم عمودند.

**نکته۲:** با توجه به این مطلب اگر یک نقطه از فصل مشترک دو صفحه معلوم باشد، معادله ی آن را نیزمی توان نوشت.

**تمرین:** نشان دهید که دو صفحه ی به معادلات $۲x+۴y+۳z=۸$ و $۴x+۸y+۶z=۱$ موازیند.

**تمرین:** معادله ی فصل مشترک دو صفحه به معادلات $۳x-۲y+z=۱$ و $۵x+۴y-۶z=۲$ را بنویسید.

حل:ابتدا نشان می دهیم که دو صفحه موازی نیستند.

$\vec{n}_1=(۳,-۲,۱)$ و $\vec{n}_2=(۵,۴,-۶)$

بدیهی است که دو بردار $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ موازی نیستند و لذا دو صفحه ی داده شده نیز موازی نیستند پس متقاطعند و فصل مشترک آنها یک خط راست است.

$\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(۸,۲۳,۲۲)$ بردار هادی فصل مشترک

نقطه ی $(۰,-۱,-۱)$ روی هر دو صفحه قرار دارد، پس روی فصل مشترک آنها نیز واقع است، پس معادله ی فصل مشترک می شود.

$$\frac{x}{۸}=\frac{y+۱}{۲۳}=\frac{z+۱}{۲۲}$$

**توجه:** مختصات نقطه ی مشترک را می توان از دستگاه زیر بدست آورد. بدین ترتیب که یکی از متغیر های دستگاه (مثلاً $z$) را برابر یک عدد حقیقی ثابت قرار داده و مقدار $x$ و $y$ را از حل دستگاه تعیین می کنیم.

$$\begin{cases}۳x-۲y+z=۱\\۵x+۴y-۶z=۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=-۱}\begin{cases}۳x-۲y-۱=۱\\۵x+۴y+۶=۲\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۳x-۲y=۲\\۵x+۴y=-۴\end{cases}\rightarrow x=۰,y=-۱$$

www.fera.ir



**تمرین:** فاصله ی دو صفحه به معادلات زیر را بدست آورید.

$$\Gamma_۱ : ۳x - y + ۲z = ۶ \quad و \quad \Gamma_۲ : -۶x + ۲y - ۴z = ۴$$

حل: واضح است که دو صفحه ی داده شده موازیند. زیرا:

$$\begin{matrix} \vec{n}_۱ = (۳, -۱, ۲) \\ \vec{n}_۲ = (-۶, ۲, -۴) \end{matrix} \rightarrow \vec{n}_۲ = -۲\vec{n}_۱ \rightarrow \vec{n}_۱ \parallel \vec{n}_۲ \rightarrow \Gamma_۱ \parallel \Gamma_۲$$

حال یک نقطه را از یکی از صفحات مانند $\Gamma_۱$ انتخاب کرده و فاصله ی آن را تا صفحه ی دیگر یعنی $\Gamma_۲$ بدست می آوریم.

$$P \in \Gamma_۱ \rightarrow P(۱, -۱, ۱)$$

$$P_۰ \in \Gamma_۲ \rightarrow P_۰(۰, ۰, -۱)$$

$$\overrightarrow{P_۰P} = (۱, -۱, ۲)$$

$$\vec{n}_۲ = \vec{n} = (-۶, ۲, -۴) \rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{۳۶ + ۴ + ۱۶} = \sqrt{۵۶}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{P_۰P} = -۶ + (-۲) + (-۸) = -۱۶$$

$$D = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_۰P}|}{|\vec{n}|} = \frac{۱۶}{\sqrt{۵۶}} = \frac{۸}{\sqrt{۱۴}}$$

**نتیجه:** فاصله ی دو صفحه ی موازی به معادلات $ax + by + cz = d$ و $ax + by + cz = d'$ را نیز می توان بـه روش زیـر محاسبه کرد.

$$D = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

**تمرین:** تمرین قبل را به کمک این نتیجه حل کنید.

***

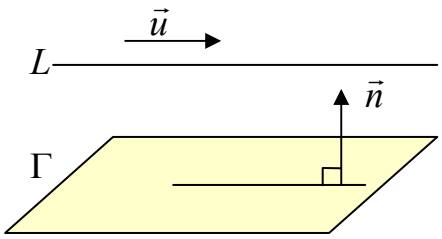
**وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا**

در فضا یک خط و یک صفحه می توانند حالت های زیر را داشته باشند.

الف) خط و صفحه موازیند. ب) خط و صفحه متقاطعند.

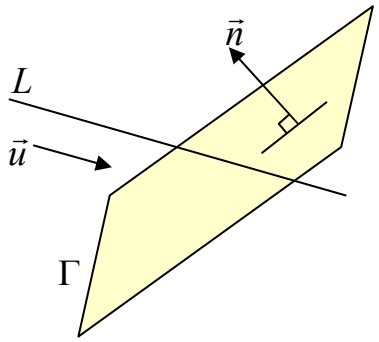
www.fera.ir






اگر بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه بر هم عمودباشند، خط و صفحه موازی خواهند بود و برعکس. همچنین اگر این دو بردار بر هم عمود نباشند. خط و صفحه متقاطع می باشند.

$$\vec{u}=(p,q,r)$$
$$\vec{n}=(a,b,c)$$
$$\vec{u}\perp\vec{n}\leftrightarrow\vec{n}.\vec{u}=۰\leftrightarrow ap+bq+cr=۰\leftrightarrow L||\Gamma$$




$$\vec{n}.\vec{u}\neq۰\leftrightarrow L\nparallel\Gamma$$

**تمرین:** وضعیت نسبی خط و صفحه به معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\Gamma:۲x+y-z=۲\ \text{و}\ L:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{-۱}$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(۱,۲,-۱)\\ \vec{n}=(۲,۱,-۱)\end{array}\right\}\rightarrow\vec{n}.\vec{u}=۵\neq۰$$

لذا خط و صفحه متقاطع هستند.

**تمرین:** نقطه ی تقاطع خط و صفحه ی تمرین قبل را بیابید.

حل: کافی است معادله ی خط را به صورت پارامتری نوشته و در معادله ی صفحه قرار دهیم.

$$L:\begin{cases}x=۱+t\\ y=۲t\\ z=-t\end{cases}\rightarrow ۲(۱+t)+(۲t)-(-t)=۲\rightarrow t=۰$$

با قرار دادن مقدار $t$ بدست آمده در معادله ی پارامتری خط، نقطه ی مشترک خط و صفحه پیدا می شود.

$$P(۱,۰,۰)$$

***

www.fera.ir



**حل چند تمرین:**

**تمرین۱)** خط و صفحه به معادلات زیر داده شده اند.

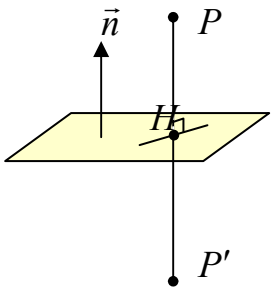
$$L:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۲}{۴} \quad \text{و} \quad \Gamma: ۲x+y-z=۲$$

**الف:** نشان دهید که خط و صفحه موازی یکدیگرند. ب : فاصله ی خط و صفحه را تعیین کنید.

**تمرین۲)** قرینه ی نقطه ی $P(۵,۲,-۱)$ را نسبت به صفحه ی $x+y+z=۳$ بدست آورید.

حل:ابتدا معادله ی خطی را می نویسیم که از نقطه ی $P(۵,۲,-۱)$ بگذرد و بر صفحه ی $x+y+z=۳$ عمود باشد. هادی این خط نرمال صفحه ی مزبور است.پس معادله ی این خط به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=t+۵ \\ y=t+۲ \\ z=t-۱ \end{cases}$$




محل تقاطع این خط را با صفحه بدست می آوریم.

$$(t+۵)+(t+۲)+(t-۱)=۳ \rightarrow t=-۱$$

و با قرار دادن مقدار $t$ در معادله ی خط مختصات پای عمود بدست می آید.

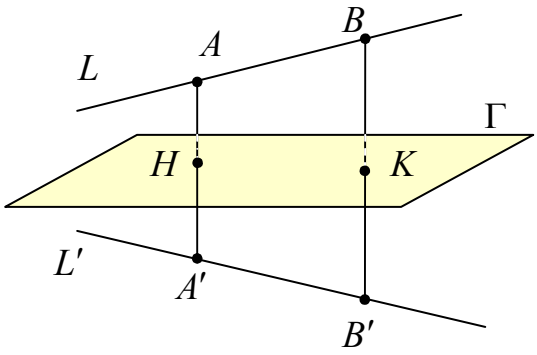
$$H(۴,۱,-۲)$$

حال مختصات نقطه ی $P'$ قرینه ی نقطه ی $P$ را نسبت به $H$ بدست می آوریم.

$$\therefore P'(۳,۰,-۳)$$

**تمرین۳)** معادله ی قرینه ی خط $L$ را نسبت به صفحه ی $\Gamma$ بدست آورید. هرگاه داشته باشیم:

$$L:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{-۱} \quad \text{و} \quad \Gamma: x+y+z=۱$$




حل: دو نقطه ی دلخواه روی خط $L$ انتخاب نموده و سپس قرینه ی آنها را نسبت به صفحه ی $\Gamma$ بدست می آوریم. بعد معادله ی خطی را می نویسیم که از نقاط جدید بگذرد.

www.fera.ir



$$A(-۱,-۴,۲)\in L\rightarrow AA':\begin{cases}x=t-۱\\ y=t-۴\\ z=t+۲\end{cases}\rightarrow (t-۱)+(t-۴)+(t+۲)=۱\rightarrow t=\frac{۴}{۳}$$

$$\rightarrow H(\frac{۱}{۳},-\frac{۸}{۳},\frac{۱۰}{۳})\rightarrow A'(\frac{۵}{۳},\frac{۴}{۳},\frac{۱۴}{۳})\in L'$$

$$B(۲,۲,-۱)\in L\rightarrow BB':\begin{cases}x=t+۲\\ y=t+۲\\ z=t-۱\end{cases}\rightarrow (t+۲)+(t+۲)+(t-۱)=۱\rightarrow t=-\frac{۲}{۳}$$

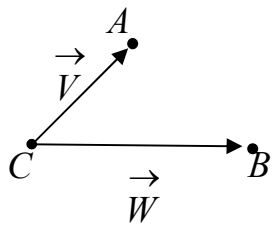
$$\rightarrow K(\frac{۴}{۳},\frac{۴}{۳},-\frac{۵}{۳})\rightarrow B'(\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳})\in L'$$

حال معادله ی خط $L'$ را می نویسیم. در حالی که مختصات دو نقطه از آن یعنی $B'$ و $A'$ معلومند.

$$u=A'B'=(\overset{p}{۱},\overset{q}{\frac{۲}{۳}},\overset{r}{-\frac{۱۶}{۳}}) \qquad , \qquad A'(\overset{x_\circ}{\frac{۵}{۳}},\overset{y_\circ}{\frac{۴}{۳}},\overset{z_\circ}{\frac{۱۴}{۳}}) \quad \Rightarrow \frac{x-\frac{۵}{۳}}{۱}=\frac{y-\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{z-\frac{۱۴}{۳}}{-\frac{۱۶}{۳}}$$

**تمرین۴)** نشان دهید چهار نقطه ی $A(۲,۳,۲)$ و $B(۱,-۱,-۳)$ و $C(۱,۰,-۱)$ و $D(۵,۹,۵)$ روی یک صفحه قرار دارند.

حل: کافی است معادله ی صفحه ای را بنویسیم که از نقاط $C$ و $B$ و $A$ بگذرد. سپس نشان دهیم که نقطه ی $D$ در معادله ی بدست آمده صدق می کند.




$$\overset{x_\circ\ y_\circ\ z_\circ}{A(۲\ ,۳\ ,۲)}$$

$$\vec{V}=\vec{AC}=(-۱,-۳,-۳)$$

$$\vec{W}=\vec{BC}=(۰,۱,۲)$$

$$\vec{n}=\vec{V}\times\vec{W}=(\underset{a}{-۳},\underset{b}{۲},\underset{c}{-۱})$$

$$a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=۰\rightarrow -۳(x-۲)+۲(y-۳)-۱(z-۲)=۰$$

$$\rightarrow -۳x+۲y-z=-۲ \qquad \text{معادله ی صفحه } \Gamma$$

حال بررسی می کنیم که نقطه ی $D$ روی صفحه ی $\Gamma$ قرار دارد یا خیر؟

$$(-۳)(۵)+(۲)(۹)+(-۱)(۵)=-۲\rightarrow -۲=-۲\rightarrow D\in\Gamma$$

www.fera.ir



**تمرین۵)** کوتاه ترین فاصله ی ( طول عمود مشترک ) بین دو خط متنافر به معادلات زیر را پیدا کنید.

$$L_۱ : \frac{x}{۱} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳} \qquad \text{و} \qquad L_۲ : \frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۲}{۱}$$

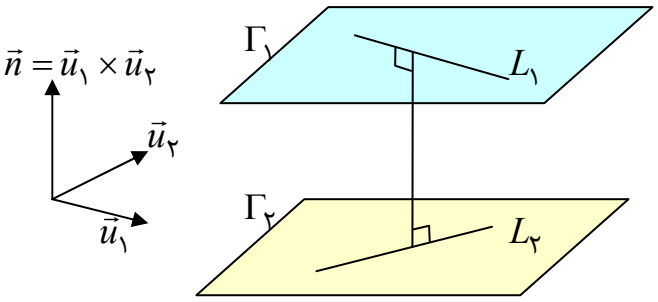
حل: بردار $\vec{n} = \vec{u}_۱ \times \vec{u}_۲$ امتداد عمود مشترک را مشخص می کند. یک نقطه مانند $A$ روی خط $L_۱$ و یک نقطه ی $B$ روی خط $L_۲$ انتخاب می کنیم. طول تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ روی $\vec{n} = \vec{u}_۱ \times \vec{u}_۲$ طول عمود مشترک است.

$$A(۰,۰,۰) \quad , \quad B(-۱,۰,-۲) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-۱,۰,-۲)$$

$$\vec{u}_۱ = (۱,۲,۳) \quad , \quad \vec{u}_۲ = (۲,-۱,۱) \rightarrow \vec{n} = \vec{u}_۱ \times \vec{u}_۲ = \left(\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}\right) = (۵,۵,-۵)$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (-۱)(۵) + (۰)(۵) + (-۲)(-۵) = ۵$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{۲۵ + ۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۳}$$




تصویر $\overrightarrow{AB}$ روی امتداد $\vec{n}$

$$(\overrightarrow{AB})' = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{|\vec{n}|^۲}\vec{n} = \frac{۵}{(۵\sqrt{۳})^۲}(۵,۵,-۵) = \frac{۲۵}{(۲۵)(۳)}(۱,۱,-۱) = (\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{-۱}{۳})$$

$$D = |(\overrightarrow{AB})'| = \sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}} = \sqrt{\frac{۳}{۹}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$ طول عمود مشترک دو خط $L_۲$ و $L_۱$

***

**تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی**

www.mathtower.org

www.fera.ir

# آموزش

## هندسه ی تحلیلی و جبرخطی

دوره ی پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

فصل سوم : مقاطع مخروطی

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.org

مهر ۱۳۸۹

www.fera.ir

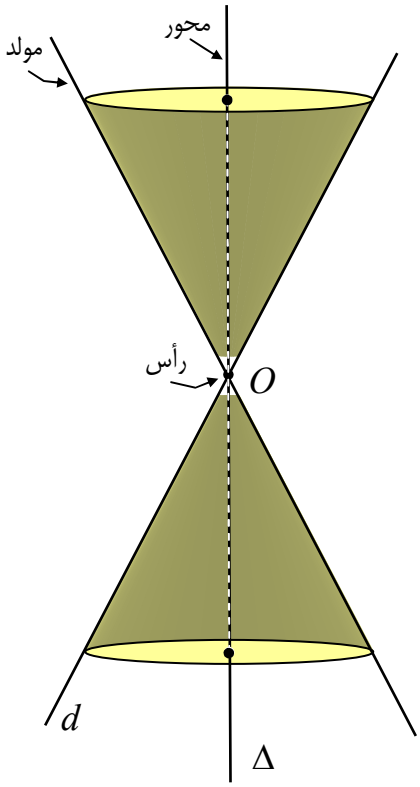


**باسمه تعالی**

## فصل سوم: مقاطع مخروطی

### ☑مقاطع مخروطی

اگر $\Delta$ یک خط ثابت و خط $d$ که در نقطه ی $O$ با آن متقاطع است،حول خط $\Delta$ دوران کند، سطحی بوجود می آورد که به آن سطح مخروطی دوار می گویند.




نقطه ی $O$ را رأس و خط ثابت $\Delta$ را محور و خط دیگر یعنی $d$ را مولد سطح مخروطی دوار گویند. فصل مشترک یک صفحه با سطح مخروطی دوار را مقطع مخروطی می نامند. مقطع های مخروطی می توانند:

۱) دایره: اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس نگذرد، مقطع ایجاد شده یک دایره است.

۲) بیضی: اگر صفحه بر محور سطح عمود نباشد و صفحه در یک طرف سطح مخروطی قرار گیرد، مقطع ایجاد شده یک بیضی است.

۳) هذلولی: اگر صفحه از رأس مخروطی نگذرد و هر دو طرف سطح مخروطی را قطع نماید ، مقطع ایجاد شده یک هذلولی است.

۴) سهمی: اگر صفحه با یکی از مولد های سطح مخروطی موازی بوده و سطح مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند،مقطع ایجاد شده یک سهمی است.

۵) نقطه: اگر صفحه عمود بر محور و از رأس مخروطی بگذرد، مقطع ایجاد شده نقطه است.

۶) خط: اگر صفحه از روی محور بگذرد ، مقطع ایجاد شده یک خط است.

۷) دو خط متقاطع: اگر صفحه بر محور منطبق باشد، مقطع ایجاد شده دو خط متقاطع است.

در اینجا مهمترین مقاطع مخروطی را بررسی می کنیم.

www.mathtower.org

***

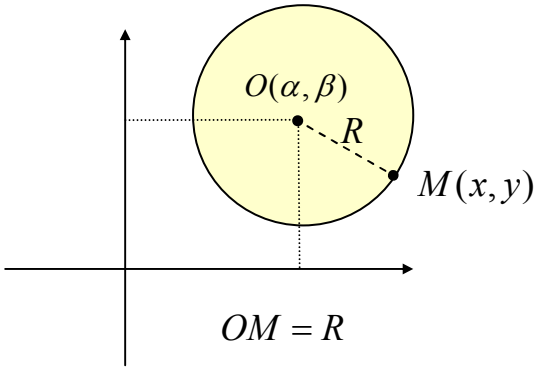
www.fera.ir



☑ **دایره**

**تعریف:** دایره مجموعه ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ی ثابت به یک فاصله ی ثابتی باشند.

نقطه ی ثابت را مرکز دایره و فاصله ی ثابت را شعاع دایره می گویند.




**معادله ی دایره:** اگر $M(x,y)$ نقطه ی دلخواهی از دایـره باشـد در ایـن صورت:

$$OM=R\rightarrow OM^{۲}=R^{۲}$$
$$\rightarrow (x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

که در آن $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز و $R$ اندازه ی شعاع دایره است.

### معادله ی استاندارد دایره

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

**نتیجه :** در حالت خاص اگر مرکز دایره روی مبدأ مختصات باشد، معادله ی دایره به شکل زیر خواهد آمد.

$$x^{۲}+y^{۲}=R^{۲}$$

**تمرین:** معادله ی دایره ای را بنویسید که $(۳,-۲)$ مرکز و اندازه ی شعاع آن۴ باشد.

**تمرین:** معادله ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,۰)$ و ازنقطه ی $(-۲,۱)$ بگذرد.

**تمرین:** معادله ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۲,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y-۳=۰$ مماس باشد.

**تمرین:** معادله ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(-۶,۳)$ و $B(۲,۵)$ دو سر قطری از آن باشند.

www.fera.ir



**معادله ی گسترده ی دایره:**

اگر معادله ای به شکل $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معلوم باشد. این معادله به شرطی معادله ی دایره است که

الف) ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یک باشند.(یا مساوی باشند.)

ب) معادله شامل جمله ی $xy$ نباشد.

ج) مقدار $\Delta = a^۲ + b^۲ - ۴c$ مثبت باشد.

با این شرایط معادله ی گسترده ی دایره به معادله ی استاندارد تبدیل می شود.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \rightarrow (x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴}) + (y^۲ + by + \frac{b^۲}{۴}) - \frac{a^۲}{۴} - \frac{b^۲}{۴} + c = ۰$$

$$\rightarrow (x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}$$

$$\rightarrow (x - (-\frac{a}{۲}))^۲ + (y - (-\frac{b}{۲}))^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}$$

با توجه به معادله ی بدست آمده داریم:

مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$

اندازه ی شعاع دایره $R = \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}} = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$

**تمرین:** معادله ی زیر داده شده است.

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۶y - ۱۵ = ۰$$

الف) نشان دهید که این معادله ، معادله ی یک دایره است.

ب) مختصات مرکز و اندازه ی شعاع آن را بدست آورید. ( به دو روش حل کنید.)

ج) نمودار دایره را رسم کنید.

**تمرین:** معادله ی $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y = k$ در صورتی می تواند معادله ی یک دایره باشد که:

۱) $k > -۲$ ۲) $k = -۲$ ۳) $k < -۲$ ۴) $k \geq -۲$

www.fera.ir



**تمرین:** معادله ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۳,-۲)$ و $C(-۱,-۲)$ بگذرد.

حل: فرض کنیم که معادله ی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ بصورت باشد. پس:

$$A(۱,۰) \xrightarrow{x^۲+y^۲+ax+by+c=۰} ۱ + ۰ + a + ۰ + c = ۰ \rightarrow a + c = -۱$$

$$B(۳,-۲) \xrightarrow{x^۲+y^۲+ax+by+c=۰} ۹ + ۴ + ۳a - ۲b + c = ۰ \rightarrow ۳a - ۲b + c = -۱۳$$

$$C(-۱,-۲) \xrightarrow{x^۲+y^۲+ax+by+c=۰} ۱ + ۴ - a - ۲b + c = ۰ \rightarrow -a - ۲b + c = -۵$$

$$\begin{cases} ۳a - ۲b + c = -۱۳ \\ -a - ۲b + c = -۵ \end{cases} \xrightarrow{a+c=-۱} \begin{cases} ۳a - ۲b + (-۱ - a) = -۱۳ \\ -a - ۲b + (-۱ - a) = -۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = -۶ \\ -a - b = -۲ \end{cases}$$

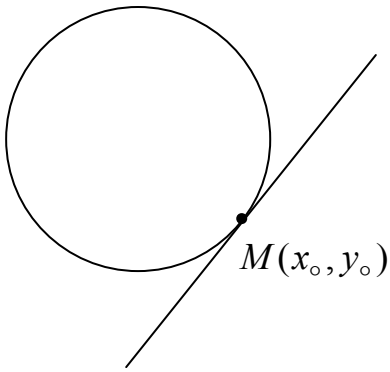
$$\rightarrow a = -۲ \ , \ b = ۴ \ , \ c = ۱$$

لذا:

$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ معادله ی دایره

***

**روش تعیین معادله ی خط مماس بر دایره از یک نقطه ی روی آن**




برای تعیین معادله ی خط مماس بر دایـره ی $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$ در نقطه ی $M(x_۰, y_۰)$ روی دایره از فرمول زیر استفاده می کنیم.بدیهی است که این فرمول از معادله ی استاندارد دایره بدست می آید.

$$(x_۰ - \alpha)(x - \alpha) + (y_۰ - \beta)(y - \beta) = R^۲$$

**تمرین:** معادله ی خط مماس بر دایره به معادله ی زیر از نقطه ی $A(۶,۱)$ را بنویسید.

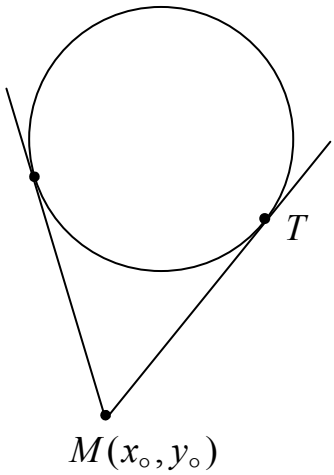
$$x^۲ + y^۲ - ۶x + ۸y = ۹$$

***

www.fera.ir



**روش تعیین اندازه ی پاره خط محصور بین یک نقطه ی بیرون دایره و نقطه ی تماس**




از یک نقطه بیرون دایره دو خط مماس بر دایره رسم می شود. اندازه ی پاره خط هایی از ایـن دو خط مماس محصور بین این نقطه و نقطه ی تماس با یکدیگر برابر است. این اندازه به شـکل زیر بدست می آید.

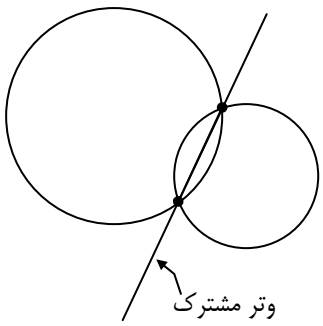
$$MT = \sqrt{(x_\circ - \alpha)^۲ + (y_\circ - \beta)^۲ - R^۲}$$

تمرین: اندازه ی خط مماسی که از نقطه ی $A(۲,۳)$ بر دایره به معادله ی زیر رسم می شود را بیابید.

$$(x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲$$

***

**روش تعیین وتر مشترک دو دایره ی متقاطع**




وتر مشترک دو دایره خطی است که از محل تقاطع دو دایره بگذرد. برای تعیین معادله ی این خط، معادلات دو دایره در حالت گسترده را نظیر به نظیر از هم کم می کنیم. در این صورت داریم:

معادله ی دایره ی اول $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$

معادله ی دایره ی دوم $x^۲ + y^۲ + a'x + b'y + c' = ۰$

$$\rightarrow (x^۲ + y^۲ + ax + by + c) - (x^۲ + y^۲ + a'x + b'y + c') = ۰$$
$$\Rightarrow (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = ۰$$

لذا معادله ی وتر مشترک به شکل زیر در خواهد آمد.

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = ۰$$

**تمرین:** معادله ی وتر مشترک دو دایره به معادلات زیر را بدست آورید.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۱۴ \quad \text{و} \quad x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y = ۰$$

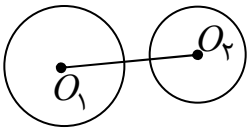
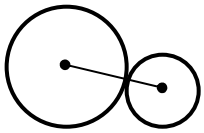
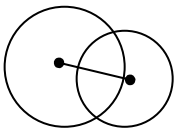
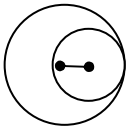
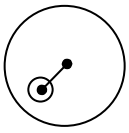
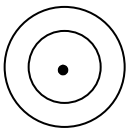
www.fera.ir



**روش تعیین وضع دو دایره نسبت به هم**

برای تعیین وضع نسبی دو دایره ، اندازه ی شعاع های آنها را با اندازه ی خط المرکزین مقایسه کنید. خط المرکزین پاره خطی است که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند.

اگر دایره ی $C_1$ به مرکز $O_1$ و شعاع $R_1$ و دایره ی $C_2$ به مرکز $O_2$ و شعاع $R_2$ و طول خط المرکزین دو دایره $d = O_1O_2$ باشد. با فرض اینکه $R_1 > R_2$ به کمک جدول زیر می توان حالت های مختلف دو دایره را تعیین کرد.

| ردیف | حالت | رابطه | شکل نمونه |
|---|---|---|---|
| ۱ | دو دایره بیرون یکدیگرند.(متخارج) | $d > R_1 + R_2$ |  |
| ۲ | دو دایره مماس بیرونی اند. | $d = R_1 + R_2$ |  |
| ۳ | دو دایره متقاطع اند. | $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$ |  |
| ۴ | دو دایره مماس درونی اند. | $d = R_1 - R_2$ |  |
| ۵ | دو دایره درون یکدیگرند.(متداخل) | $d < R_1 - R_2$ |  |
| ۶ | دو دایره هم مرکزند. | $d = 0$ |  |

**تمرین:** در هر مورد وضع نسبی دو دایره به معادلات داده شده را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$

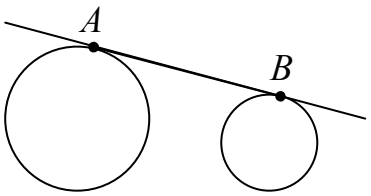
ب) $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-7)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases}$

www.fera.ir

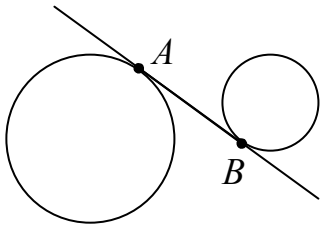


**روش تعیین اندازه ی مماس مشترک دو دایره**

مماس مشترک دو دایره خطی است بر هر دو دایره مماس است. با توجه به اینکه دایره ها در یک طرف یا هر دو طرف خط قرار دارند. خط مماس مشترک به دو نوع خارجی و داخلی تقسیم می شوند.




مماس مشترک خارجی




مماس مشترک داخلی

www.mathtower.org

تعداد مماس های مشترک دو دایره با توجه به وضعیت نسبی آنها مطابق جدول زیر است.

| وضع نسبی دو دایره | تعداد مماس مشترک خارجی | تعداد مماس مشترک داخلی |
|---|---|---|
| متخارج | ۲ | ۲ |
| مماس خارجی | ۲ | ۱ |
| متقاطع | ۲ | ۰ |
| مماس داخلی | ۱ | ۰ |
| متداخل | ۰ | ۰ |

طول پاره خط محصور بین دو نقطه ی تماس به صورت زیر بدست می آید.

مماس مشترک خارجی $AB = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2}$

مماس مشترک داخلی $A'B' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2}$

**تمرین:** اندازه مماس مشترک داخلی و اندازه ی مماس مشترک خارجی دو دایره ی تمرین قبل را تعیین کنید.

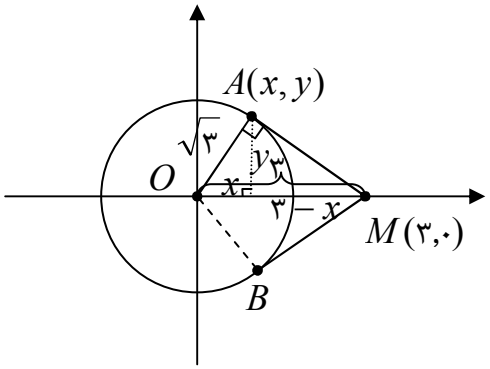
www.fera.ir



**چند تمرین:**

**تمرین۱)** از نقطه ی $(۳,۰)$دو مماس بر دایره ی $x^۲+y^۲=۳$ رسم می کنیم تا بر دایره ی در نقاط $A$ و $B$ مماس شوند. مختصات نقاط $A$ و $B$ را پیدا کنید.

حل: واضح است که مثلث قائم الزاویه است.پس:




$$OM=۳$$
$$OA=\sqrt{۳}$$
$$AM=\sqrt{۹-۳}=\sqrt{۶}$$
$$AM=\sqrt{(۳-x)^۲+y^۲}$$
$$\rightarrow (۳-x)^۲+y^۲=۶$$

از طرفی داریم: $x^۲+y^۲=۳$ لذا می توان نوشت:

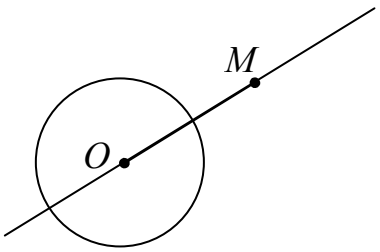
$$\begin{cases}(۳-x)^۲+y^۲=۶\\ x^۲+y^۲=۳\end{cases}\rightarrow x=۱, y=\pm\sqrt{۲}$$

$$\therefore A|^{۱}_{\sqrt{۲}} \quad , \quad B|^{۱}_{-\sqrt{۲}}$$

**تمرین۲)** معادله ی خط عمود بر دایره ی $x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰$ از نقطه ی $(۳,-۱)$ را بنویسید.

حل: کافی است معادله ی خطی را بنویسیم که از نقطه ی داده شده و مرکز دایره بگذرد.

$$M(۳,-۱) \text{ و } O(-۳,-۴)$$




$$m_{MO}=\frac{-۴+۱}{-۳-۳}=\frac{-۳}{-۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$y-y_O=m(x-x_O)\rightarrow y+۴=\frac{۱}{۲}(x+۳)$$

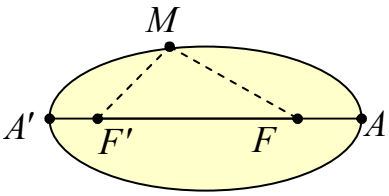
www.mathtower.org

***

www.fera.ir



## ☑ بیضی




$$MF + MF' = ۲a$$

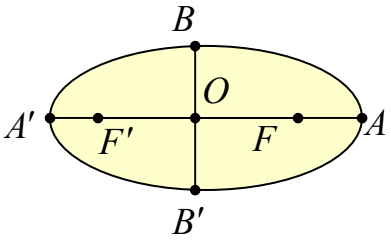
**تعریف :** بیضی مجموعه ی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل هر یـک از آنهـا از دو نقطه ی ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی باشد.

دو نقطه ی ثابت را کانون های بیضی می نامند و مقدار ثابت را عدد ثابت بیضی گفته و آنرا با $۲a$ نمایش می دهند.

پاره خط های $MF$ و $MF'$ را شعاع های حامل نقطه ی $M$ می نامند.

فاصله ی بین دو کانون بیضی را فاصله ی کانونی می نامند و آنرا با $۲c$ نمایش می دهند.

نقطه ی وسط کانون ها ی بیضی را مرکز بیضی می گویند.




$AA' = ۲a$ قطر بزرگ

$BB' = ۲b$ قطر کوچک

$FF' = ۲c$ فاصله ی کانونی

هر بیضی دارای دو قطر می باشد که یکی از دو کانون گذشته و دیگری عمود بر آن در مرکز بیضی است. قطری که از دو کانون می گذرد را قطر بزرگ (اطول) یا قطر کانونی می نامند و آنرا با $۲a$ نمایش می دهند و قطر دیگر را قطر کوچک (اقصر) یا ناکانونی می گوینـد و آنرا با $۲b$ نمایش می دهند.

www.mathtower.org

**تذکر۱)** واضح است که در هر بیضی فاصله ی کانونی از قطر بزرگ کوچکتر است پس:

$$FF' < AA' \rightarrow ۲c < ۲a \rightarrow c < a \rightarrow \frac{c}{a} < ۱$$

نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند و آنرا با $e$ نمایش می دهند.

$$e = \frac{c}{a} < ۱$$

در واقع خروج از مرکز بیضی نشان دهنده ی کشیدگی بیضی است.اگر $e$ به صفر نزدیکتر باشد، بیضی به دایره شبیه تر است و اگر $e$ به یک نزدیک شود، بیضی کشیده تر است.

**تذکر۲)** در هر بیضی رابطه ی زیر برقرار است.

$$b^۲ + c^۲ = a^۲$$

**تذکر۳)** قطر های بیضی محور های تقارن و مرکز بیضی مرکز تقارن آن است.

www.fera.ir



**بررسی بیضی**

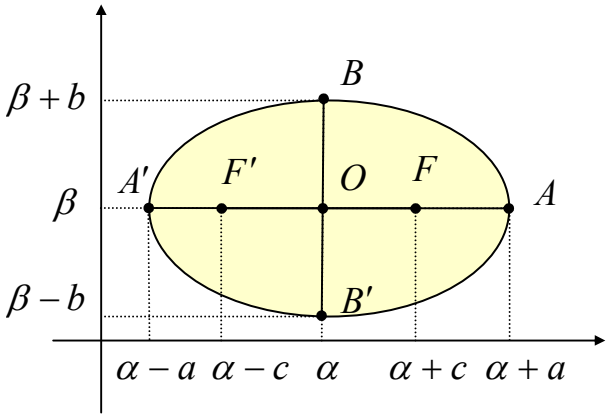
در اینجا بیضی را در دو حالت خاص یعنی وقتی که قطر بزرگ آن موازی با یکی از محور های مختصات باشد، بررسی می کنیم.

***

**الف) بررسی بیضی وقتی که قطر بزرگ آن موازی محور طول ها باشد. (بیضی افقی)**

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز بیضی باشد. در این صورت داریم:

معادله ی استاندارد بیضی در حالت کلی:




$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

معادله ی بیضی وقتی که مرکز آن روی مبدأ مختصات باشد:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مختصات رئوس بیضی: $B'|_{\beta-b}^{\alpha}$ و $B|_{\beta+b}^{\alpha}$ و $A'|_{\beta}^{\alpha-a}$ و $A|_{\beta}^{\alpha+a}$

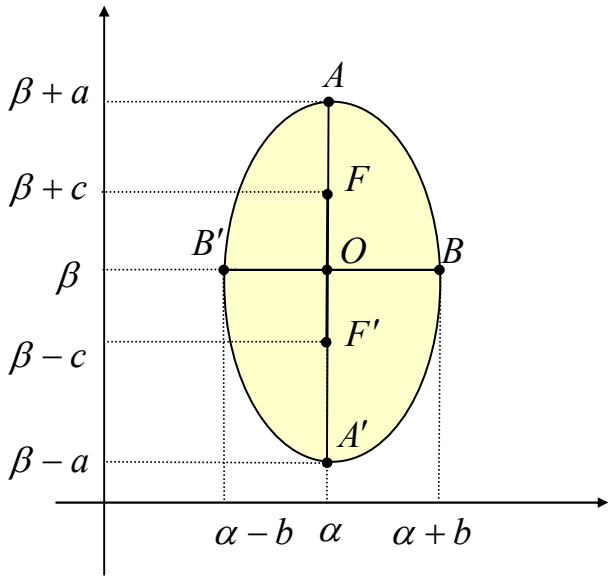
مختصات کانون های بیضی: $F'|_{\beta}^{\alpha-c}$ و $F|_{\beta}^{\alpha+c}$

***

www.fera.ir



**ب) بررسی بیضی وقتی که قطر بزرگ آن موازی محور عرض ها باشد. (بیضی قائم)**




اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز بیضی باشد.در این صورت داریم:

معادله ی استاندارد بیضی در حالت کلی:

$$\frac{(x-\alpha)^{۲}}{b^{۲}}+\frac{(y-\beta)^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

معادله ی بیضی وقتی که مرکز آن روی مبدأ مختصات باشد:

$$\frac{x^{۲}}{b^{۲}}+\frac{y^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

مختصات رئوس بیضی: $B'|_{\beta}^{\alpha-b}$ و $B|_{\beta}^{\alpha+b}$ و $A'|_{\beta-a}^{\alpha}$ و $A|_{\beta+a}^{\alpha}$

مختصات کانون های بیضی: $F'|_{\beta-c}^{\alpha}$ و $F|_{\beta+c}^{\alpha}$

.....

**تمرین:** معادله ی بیضی را بنویسید که در آن $A(۵,۳)$ و $A'(-۵,۳)$ مختصات دو سر قطر بزرگ آن بوده و $FF'=۸$ فاصله ی کانونی آن باشد.

**تمرین:** نقاط $F(۲,۷)$ و $F'(۲,-۱)$ کانون های بیضی هستند که طول قطر بزرگ آن ۱۰ می باشد. معادله ی بیضی را بنویسید.

**تمرین:** معادله ی بیضی را بنویسید که در آن $A(۵,۲)$ و $A'(-۵,۲)$ مختصات دو سر قطر بزرگ آن بوده و خروج از مرکز آن ۰/۸ باشد.

**تمرین:** معادله ی یک بیضی به شکل زیر است. مطلوبست تعیین نوع بیضی و مختصات مرکز، طول قطرها و فاصله ی کانونی آن

$$۴x^{۲}+۹y^{۲}-۱۶x-۱۸y=۱۱$$

www.fera.ir



**تمرین:** بیضی به معادله ی $۴x^۲+۹y^۲+۸x-۱۸y-۲۳=۰$ داده شده است.

الف) مختصات دو سر قطر ها و کانون های آنرا بنویسید.

ب) نمودار بیضی را رسم کنید.

**تمرین:** خروج از مرکز بیضی به معادله ی $۹x^۲+۴y^۲-۱۸x+۱۶y-۱۱=۰$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۳}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ د) $\frac{\sqrt{۷}}{۳}$

**تمرین:** بیضی به معادله ی $۹x^۲+۱۶y^۲=۱۴۴$ داده شده است.

الف) طول قطر ها و خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

ب) معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

حل :

www.mathtower.org

الف : ابتدا معادله را به صورت استاندارد می نویسیم.

$۹x^۲+۱۶y^۲=۱۴۴ \xrightarrow{\div ۱۴۴} \frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ بیضی افقی

$a^۲=۱۶ \to a=۴$

$b^۲=۹ \to b=۳$

طول قطر بزرگ $AA'=۲a=۲(۴)=۸$

طول قطر کوچک $BB'=۲b=۲(۳)=۶$

$a^۲=b^۲+c^۲ \to ۱۶=۹+c^۲ \to c=\sqrt{۷}$

خروج از مرکز بیضی $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

ب : دایره ی محیطی بیضی دایره است همرکز بیضی و به شعاع $a$ است. دایره ی محاطی بیضی دایره است همرکز بیضی و به شعاع $b$ است. با این تعریف داریم :

معادله ی دایره ی محیطی $(x-۰)^۲+(y-۰)^۲=۱۶$

معادله ی دایره ی محاطی $(x-۰)^۲+(y-۰)^۲=۹$

www.fera.ir



## بیضی در یک نگاه

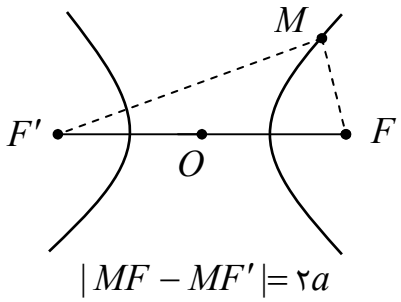
| حالت | شکل نمونه | معادله ی استاندارد | مختصات رئوس | مختصات کانون ها | تبصره |
|---|---|---|---|---|---|
| بیضی افقی (قطر کانونی موازی محور $x$ ها است.) |  | $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ | $A\left\|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right.$<br>$A'\left\|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$<br>$B\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right.$<br>$B'\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right.$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right.$<br>$F'\left\|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right.$ | $a^2$ زیر $x^2$ است. |
| بیضی قائم (قطر کانونی موازی محور $y$ ها است.) |  | $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ | $A\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\right.$<br>$A'\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\right.$<br>$B\left\|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right.$<br>$B'\left\|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right.$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right.$<br>$F'\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right.$ | $a^2$ زیر $y^2$ است. |
| توضیح | - | در هر حالت مخرج بزرگتر را $a^2$ و مخرج کوچکتر را $b^2$ می گیریم. | - | - | - |

www.fera.ir



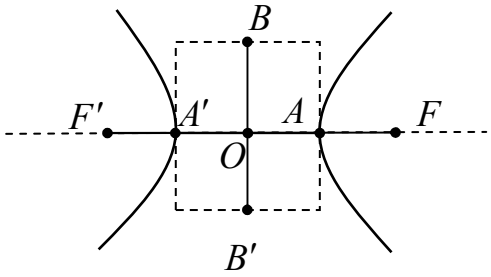
## ☑ هذلولی

**تعریف:** هذلولی مجموعه ی نقاطی از صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصله هـای آن نقاط از دو نقطه ی ثابت مقدار ثابتی باشد.




$|MF - MF'| = ۲a$

دو نقطه ی ثابت را کانون ها و فاصله ی بین آنها را فاصله ی کانونی گویند و آنرا با $۲c$ نمایش می دهند.




نقطه ی وسط کانون ها مرکز هذلولی است.پاره خط های $MF$ و $MF'$ را شعاع های حامل نقطه ی $M$ گویند.

محل تقاطع خط گذرنده از کانون ها و هذلولی را رأس هذلولی گویند. هر هذلولی دارای دو رأس فرضی نیز می باشد.

$AA' = ۲a$ قطر کانونی

$BB' = ۲b$ قطر ناکانونی

$FF' = ۲c$ فاصله ی کانونی

هر هذلولی دارای دو قطر است که یکی از دو کانون گذشته و دیگری عمود بـر آن در مرکز هذلولی است. قطر ی که از دو کانون می گذرد را قطر کانونی می نامند و آنرا بـا $۲a$ نمایش می دهند و قطر دیگر را قطر ناکانونی می گویند و آنرا با $۲b$ نمایش می دهند.

**تذکر۱)** واضح است که در هر هذلولی فاصله ی کانونی از قطر کانونی بزرگتر است پس:

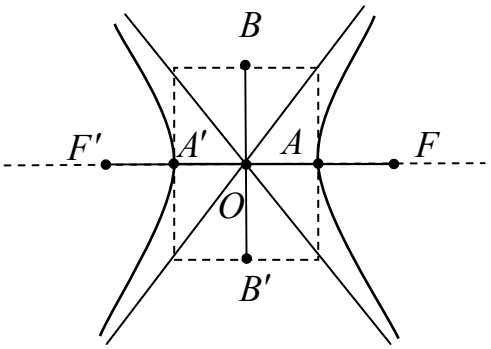
$$AA' < FF' \rightarrow ۲a < ۲c \rightarrow a < c \rightarrow \frac{c}{a} > ۱$$

نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی می نامند و آنرا با $e$ نمایش می دهند.

$$e = \frac{c}{a} > ۱$$

**تذکر۲)** در هر هذلولی رابطه ی زیر برقرار است.

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$




**تذکر۳)** هر هذلولی دو مجانب مایل دارد که محل تقـاطع آنهـا مرکـز هـذلولی است.

**تذکر۴)** قطر های هذلولی محور های تقارن و مرکز هـذلولی مرکـز تقـارن آن است.

www.fera.ir



**بررسی هذلولی**

در اینجا هذلولی را در دو حالت خاص، یعنی وقتی که قطر کانونی آن موازی با یکی از محور های مختصات باشد، بررسی می کنیم.

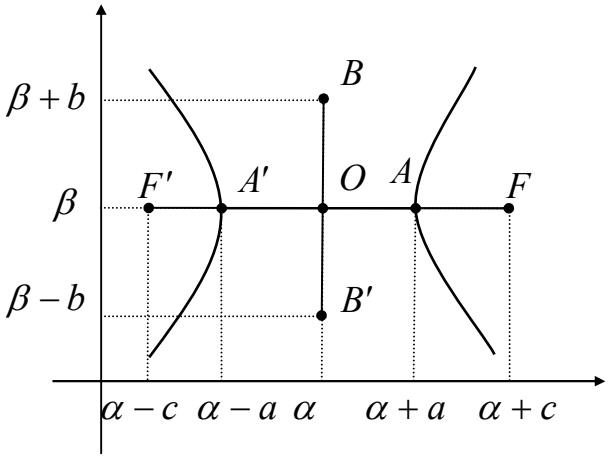
.....

**الف) بررسی هذلولی وقتی که قطر کانونی آن موازی محور طول ها باشد. (هذلولی افقی)**

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز هذلولی باشد.در این صورت داریم:

معادله ی استاندارد هذلولی در حالت کلی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$




معادله ی هذلولی وقتی که مرکز آن روی مبدأ مختصات باشد:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

معادلات مجانب های هذلولی: $\frac{x-\alpha}{a}=\pm\frac{y-\beta}{b}$

شیب مجانب ها: $m=\pm\frac{b}{a}$

مختصات رئوس هذلولی: $B'|_{\beta-b}^{\alpha}$ و $B|_{\beta+b}^{\alpha}$ و $A'|_{\beta}^{\alpha-a}$ و $A|_{\beta}^{\alpha+a}$

مختصات کانون های هذلولی: $F'|_{\beta}^{\alpha-c}$ و $F|_{\beta}^{\alpha+c}$

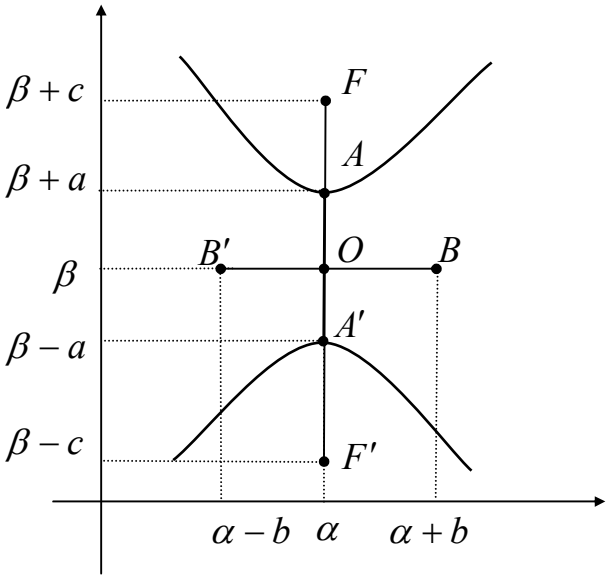
.....

www.fera.ir



**ب) بررسی هذلولی وقتی که قطر کانونی آن موازی محور عرض ها باشد. (هذلولی قائم)**

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز هذلولی باشد.در این صورت داریم:




معادله ی استاندارد هذلولی در حالت کلی:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

معادله ی هذلولی وقتی که مرکز آن روی مبدأ مختصات باشد:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

معادلات مجانب های هذلولی: $\frac{y-\beta}{a}=\pm\frac{x-\alpha}{b}$

شیب مجانب ها: $m=\pm\frac{a}{b}$

مختصات رئوس هذلولی: $B'|_{\beta}^{\alpha-b}$ و $B|_{\beta}^{\alpha+b}$ و $A'|_{\beta-a}^{\alpha}$ و $A|_{\beta+a}^{\alpha}$

مختصات کانون های هذلولی: $F'|_{\beta-c}^{\alpha}$ و $F|_{\beta+c}^{\alpha}$

.....

**تمرین:** معادله ی هذلولی را بنویسید که در آن $A(5,3)$ و $A'(-5,3)$ مختصات دو سر محور قاطع آن بوده و خروج از مرکز آن $\frac{8}{5}$ باشد.

**تمرین:** معادله ی هذلولی را بنویسید که در آن $F(1,3+\sqrt{13})$ و $F'(1,3-\sqrt{13})$ مختصات دو کانون و مقدار ثابت آن مساوی ۴ باشد. سپس معادله ی مجانب های آن را بنویسید.

www.fera.ir



**تمرین:** معادله ی هذلولی را بنویسید که $O(-۲,۱)$ مرکز و $F(۳,۱)$ یک کانون و خروج از مرکز آن $e=\frac{۵}{۴}$ باشد.

**تمرین:** هذلولی به معادله ی $۴x^۲-۸x-۹y^۲-۱۸y=۴۱$ داده شده است.

الف) نوع هذلولی را بنویسید.

ب) مختصات کانون ها و رئوس آن را بدست آورید.

ج) نمودار هذلولی را رسم کنید.

**تمرین:** مختصات مرکز ، کانون ها و معادلات مجانب های هذلولی به معادله ی زیر را تعیین کنید.

$$y^۲-۴x^۲-۲y-۱۶x-۱۹=۰$$

www.mathtower.org

**تمرین:** معادلات مجانب های هذلولی به معادله ی زیر را بدست آورید.

$$۹x^۲-۱۶y^۲+۳۶x+۳۲y=۱۲۴$$

**تمرین:** معادله ی هذلولی را بنویسید که دو خط به معادلات $۳x+۴y=۷$ و $۳x-۴y=-۱$ مجانب های آن و $F(۶,۱)$ یکی از کانون های آن باشند.

**تذکر:** هر هذلولی که در آن $a=b$ باشد را متساوی القطرین می نامند.

**تمرین:** معادله ی یک هذلولی متساوی القطرین را بنویسید که $B(۱,۵)$ و $B'(۱,۳)$ دو سر قطر غیر کانونی آن باشند.

www.fera.ir



## هذلولی در یک نگاه

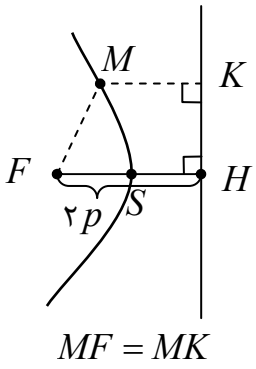
| حالت | شکل نمونه | معادله ی استاندارد | معادله ی مجانب ها | شیب مجانب ها | مختصات رئوس | مختصات کانون ها | تبصره |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| هذلولی افقی ( قطر کانونی موازی محور x ها است.) | | $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ | $\frac{x-\alpha}{a}=\pm\frac{y-\beta}{b}$ | $m=\pm\frac{b}{a}$ | $A\left\|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right.$ $A'\left\|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$ $B\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right.$ $B'\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right.$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right.$ $F'\left\|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right.$ | $y^2$ منفی است. |
| هذلولی قائم ( قطر کانونی موازی محور y ها است.) | | $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ | $\frac{y-\beta}{a}=\pm\frac{x-\alpha}{b}$ | $m=\pm\frac{a}{b}$ | $A\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\right.$ $A'\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\right.$ $B\left\|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right.$ $B'\left\|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right.$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right.$ $F'\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right.$ | $x^2$ منفی است. |
| توضیح | - | در هر حالت مخرج اول را $a^2$ و مخرج دوم را $b^2$ می گیریم. | - | - | - | - | - |

www.fera.ir



☑ **سهمی**

**تعریف:** سهمی مجموعه ی نقاطی از صفحه است که فاصله ی هر یک از آن نقاط از یک خط ثابت و یک نقطه ی ثابت به یک اندازه باشد.




$$MF = MK$$

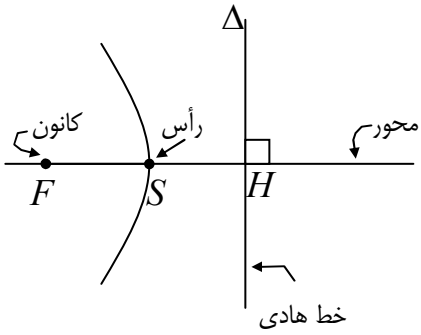
نقطه ی ثابت را کانون سهمی می نامند و آن را با $F$ نمایش می دهند و خط ثابت را خط هادی سهمی می گویند و آن را با $\Delta$ نمایش می دهند.

www.mathtower.org

فاصله ی کانون تا خط هادی را یک پارامتر سهمی می نامند و آن را با $۲p$ نشان می دهند.

$$FH = ۲p$$

نقطه ی وسط پاره خطی که از کانون بر خط هادی عمود می شود یک نقطه از سهمی است که آن را رأس سهمی می گویند.خطی که از کانون می گذرد و بر خط هادی عمود است را محور تقارن سهمی می نامند و آنرا به اختصار محور سهمی نیز می گویند.



www.fera.ir



**بررسی سهمی**

در اینجا سهمی را در چهار حالت خاص یعنی وقتی که محور کانونی آن موازی با یکی از محور های مختصات باشد،بررسی می کنیم.

.....

**۱) بررسی سهمی وقتی که محور کانونی آن موازی محور $x$ ها باشد.(سهمی افقی)**

**الف] سهمی افقی مثبت**

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله ی استاندارد سهمی: $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$

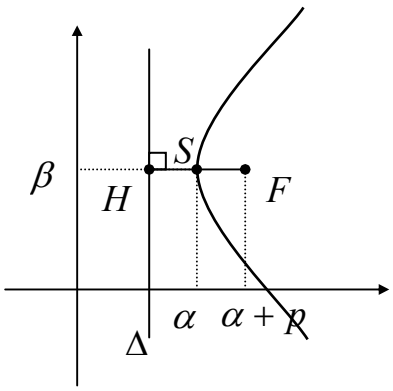
معادله ی سهمی در حالت خاص وقتی کـه رأس سـهمی روی مبـدأ مختـصات باشـد.

$y^2=4px$

مختصات کانون: $F(\alpha+p,\beta)$

معادله ی خط هادی: $x=\alpha-p$

معادله ی محور تقارن: $y=\beta$




.....

**ب] سهمی افقی منفی**

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله ی استاندارد سهمی: $(y-\beta)^2=-4p(x-\alpha)$

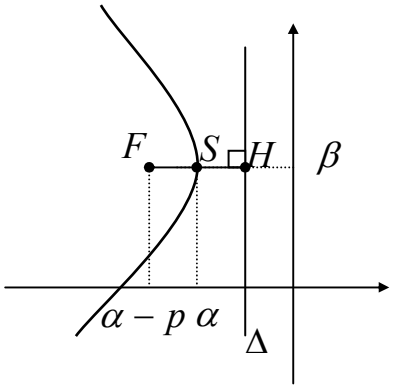
معادله ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی مبـدأ مختـصات باشـد.

$y^2=-4px$

مختصات کانون : $F(\alpha-p,\beta)$

معادله ی خط هادی: $x=\alpha+p$

معادله ی محور تقارن: $y=\beta$




.....

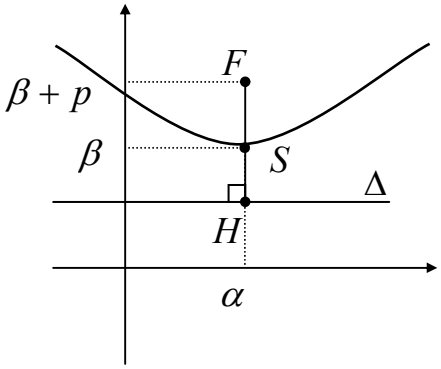
www.fera.ir



**۲) بررسی سهمی وقتی که محور کانونی آن موازی محور $y$ ها باشد.(سهمی قائم)**

**الف] سهمی قائم مثبت**

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:




معادله ی استاندارد سهمی: $(x-\alpha)^۲ = ۴p(y-\beta)$

معادله ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی مبدأ مختصات باشد.

$x^۲ = ۴py$

مختصات کانون: $F(\alpha,\beta+p)$

معادله ی خط هادی: $y=\beta-p$

معادله ی محور تقارن: $x=\alpha$

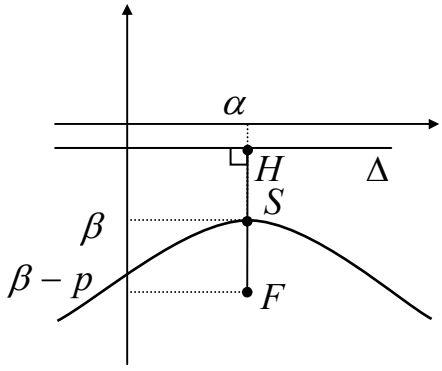
.....

**ب] سهمی قائم منفی**

اگر $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد.در این صورت داریم:

معادله ی استاندارد سهمی: $(x-\alpha)^۲ = -۴p(y-\beta)$

معادله ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی مبدأ مختصات باشد.




$x^۲ = -۴py$

مختصات کانون: $F(\alpha,\beta-p)$

معادله ی خط هادی: $y=\beta+p$

معادله ی محور تقارن: $x=\alpha$

.....

**تمرین:** معادله ی سهمی را بنویسید که $S(۱,۳)$ رأس آن بوده و معادله ی $x=۳$ خط هادی آن باشد.

**تمرین:** معادله ی سهمی را بنویسید که $y=۵$ خط هادی و $F(۳,۷)$ کانون آن باشد.

www.fera.ir



**تمرین:** معادله ی سهمی را بنویسید که در آن $S(-۱,۱)$ رأس و $F(-۱,۳)$ مختصات کانون آن باشد.

**تمرین:** سهمی به معادله ی $x^۲ - ۲x + ۸y + ۹ = ۰$ داده شده است.

الف) نوع سهمی را بنویسید.

ب) اندازه ی پارامتر سهمی را بدست آورید.

**تمرین:** سهمی به معادله ی $y^۲ - ۲y - ۲x - ۳ = ۰$ داده شده است. مختصات رأس، کانون و معادله ی خط هـادی را نوشـته و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

**تمرین:** سهمی به معادله ی $x^۲ - ۲x - ۲y - ۵ = ۰$ داده شده است. مختصات کانون و معادله ی خط هادی آن را تعیین نموده و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

www.mathtower.org

**تمرین:** سهمی به معادله ی $y^۲ - ۲ay - ۲x + b = ۰$ داده شده است. مقادیر $b$ و $a$ را چنان بیابید که $S(۱,۲)$ رأس آن باشد.

حل : کافی است که معادله را به صورت استاندارد بنویسیم.

$$y^۲ - ۲ay - ۲x + b = ۰ \to y^۲ - ۲ay + a^۲ = ۲x - b + a^۲ \to (y-a)^۲ = ۲(x - \frac{b - a^۲}{۲})$$

سهمی افقی مثبت است. لذا رأس سهمی به صورت $S(\frac{b-a^۲}{۲}, a)$ می باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a = ۱ \\ \frac{b-a^۲}{۲} = ۲ \end{cases} \to \frac{b-۱}{۲} = ۲ \to b = ۵$$

***

www.fera.ir



## سهمی در یک نگاه

| حالت | شکل نمونه | معادله ی استاندارد | مختصات کانون | معادله ی خط هادی | معادله ی محور | تبصره |
|---|---|---|---|---|---|---|
| سهمی افقی ( محور سهمی موازی محور x ها است.) | سهمی افقی مثبت | $(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha+p\\ \beta\end{matrix}\right.$ | $x=\alpha-p$ | $y=\beta$ | معادله فاقد $x^2$ است. |
| | سهمی افقی منفی | $(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha-p\\ \beta\end{matrix}\right.$ | $x=\alpha+p$ | $y=\beta$ | |
| سهمی قائم ( محور سهمی موازی محور y ها است.) | سهمی قائم مثبت | $(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+p\end{matrix}\right.$ | $y=\beta-p$ | $x=\alpha$ | معادله فاقد $y^2$ است. |
| | سهمی قائم منفی | $(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$ | $F\left\|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-p\end{matrix}\right.$ | $y=\beta+p$ | $x=\alpha$ | |

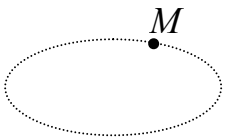
www.fera.ir



### ☑ مکان هندسی

هرگاه مختصات نقطه ای به پارامتر بستگی داشته باشد، با تغییر پارامتر جای نقطه در صفحه تغییر می کند و به نقاط بی شماری تبدیل می شود.اگر این نقاط را به هم وصل کنیم،شکل حاصل را مکان هندسی آن نقطه می نامند.

به طور کلی می توان مکان هندسی را به صورت زیر تعریف کرد.




مکان هندسی، مجموعه ی نقاطی از صفحه است که دارای خاصیت یکسانی باشند.

**نتیجه:** دایره ، بیضی، هذلولی و سهمی نمونه هایی از مکان هندسی در صفحه هستند.

***

### معادله ی مکان هندسی

منظور از معادله ی مکان هندسی یک نقطه ، رابطه ای بین طول وعرض آن نقطه است که به پارامتر بستگی نداشته باشد.

**تمرین:** مکان هندسی نقطه ی $A(m+۱,۲m-۵)$ وقتی که $m$ تغییر می کند را بنویسید.

www.mathtower.org

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$x=m+۱\rightarrow m=x-۱$$

$$y=۲m-۵\rightarrow m=\frac{y+۵}{۲}$$

$$\rightarrow \frac{y+۵}{۲}=x-۱\rightarrow y=۲x+۷$$

لذا مکان هندسی ، یک خط راست است.

***

**تمرین:** مکان هندسی نقطه ی $B(۱+\sin\alpha\,,۲+\cos\alpha)$ وقتی که $\alpha$ تغییر می کند را بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$x=۱+\sin\theta\rightarrow \sin\theta=x-۱\rightarrow \sin^{۲}\theta=(x-۱)^{۲}$$

$$y=۲+\cos\theta\rightarrow \cos\theta=y-۲\rightarrow \cos^{۲}\theta=(y-۲)^{۲}$$

$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=(x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}\rightarrow (x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۱$$

لذا مکان هندسی ، دایره به مرکز $(۱,۲)$ و شعاع یک می باشد.

www.fera.ir



**تمرین:** مکان هندسی نقطه ی $C(۱+۴\sin\theta\,,-۲+۳\cos\theta)$ وقتی که $\theta$ تغییر می کند را بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$x=۱+۴\sin\theta\rightarrow\sin\theta=\frac{x-۱}{۴}\rightarrow\sin^{۲}\theta=\frac{(x-۱)^{۲}}{۱۶}$$

$$y=-۲+۳\cos\theta\rightarrow\cos\theta=\frac{y+۲}{۳}\rightarrow\cos^{۲}\theta=\frac{(y+۲)^{۲}}{۹}$$

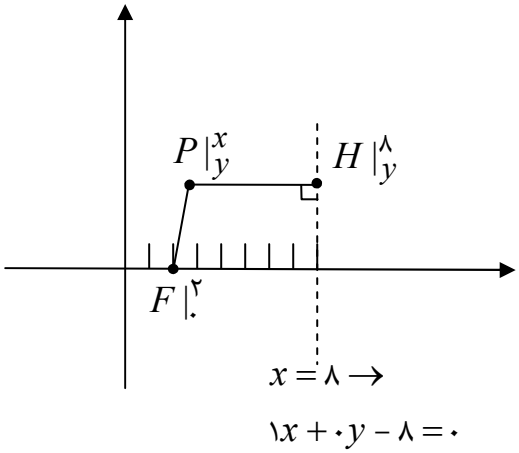
$$\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=\frac{(x-۱)^{۲}}{۱۶}+\frac{(y+۲)^{۲}}{۹}\rightarrow\frac{(x-۱)^{۲}}{۱۶}+\frac{(y+۲)^{۲}}{۹}=۱$$

لذا مکان هندسی ، بیضی افقی به مرکز $(۱,-۲)$ می باشد.

***

**تمرین:** مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله ی آنها از نقطه ی $(۲,۰)$ برابر نصف فاصله ی آنها از خط $x=۸$ باشد.

حل:




$$PF=\frac{PH}{۲}\rightarrow ۲PF=PH$$

$$PF=\sqrt{(x-۲)^{۲}+(y-۰)^{۲}}$$

$$PH=\frac{|۱(x)+۰(y)-۸|}{\sqrt{۱^{۲}+۰^{۲}}}=|x-۸|$$

$$\rightarrow ۲\sqrt{(x-۲)^{۲}+y^{۲}}=|x-۸|$$

$$\rightarrow ۴(x-۲)^{۲}+۴y^{۲}=(x-۸)^{۲}$$

$$\rightarrow ۴x^{۲}-۱۶x+۱۶+۴y^{۲}=x^{۲}-۱۶x+۶۴$$

$$\rightarrow ۳x^{۲}+۴y^{۲}=۴۸\rightarrow\frac{x^{۲}}{۱۶}+\frac{y^{۲}}{۱۲}=۱$$

مکان هندسی بیضی افقی به مرکز $(۰,۰)$ می باشد. و در آن $a=۴$ و $b=۲\sqrt{۳}$

***

www.fera.ir



## مقاطع مخروطی از نگاهی دیگر

اگر معادله ی یک مکان هندسی داده شده باشد، برای تعیین معادله استاندارد آن یکی از روشهای زیر را بکار می بریم.

الف) هر معادله به شکل $\alpha x^۲ + \beta y^۲ + ax + by + c = ۰$ که فاقد جمله ی $xy$ است.در شرایط زیر می تواند یکی از مقـاطع مخروطی[۱] باشد. (روش مربع کامل کردن)

| مقطع مخروطی | شرایط |
|---|---|
| دایره | $\alpha = \beta$ |
| بیضی | $\alpha \neq \beta$ ولی هم علامت هستند. |
| هذلولی | $\alpha \neq \beta$ ولی مختلف العلامه هستند. |
| سهمی | یکی از دو ضریب $\alpha$ یا $\beta$ صفر باشند. |

www.mathtower.org

$$\alpha x^۲ + \beta y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\rightarrow \alpha x^۲ + ax + \beta y^۲ + by = -c$$

$$\rightarrow \alpha(x^۲ + \frac{a}{\alpha}x + \frac{a^۲}{۴\alpha^۲} - \frac{a^۲}{۴\alpha^۲}) + \beta(y^۲ + \frac{b}{\beta}y + \frac{b^۲}{۴\beta^۲} - \frac{b^۲}{۴\beta^۲}) = -c$$

$$\rightarrow \alpha(x + \frac{a}{۲\alpha})^۲ - \frac{a^۲}{۴\alpha} + \beta(y + \frac{b}{۲\beta})^۲ - \frac{b^۲}{۴\beta} = -c$$

$$\rightarrow \alpha(x + \frac{a}{۲\alpha})^۲ + \beta(y + \frac{b}{۲\beta})^۲ = \frac{a^۲}{۴\alpha} + \frac{b^۲}{۴\beta} - c$$

$$\rightarrow \alpha(x + \frac{a}{۲\alpha})^۲ + \beta(y + \frac{b}{۲\beta})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴\alpha\beta c}{۴\alpha\beta}$$

که در دایره لازم است که $\sqrt{\frac{a^۲ + b^۲ - ۴\alpha\beta c}{۴\alpha\beta}}$ باشد و در حالت خاص $\alpha = \beta = ۱$ باید $a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰$

**تمرین:** نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $۴x^۲ + ۹y^۲ + ۱۶x - ۳۶y + ۱۶ = ۰$

[۱] – به جز در حالت های استثنایی« تهی – نقطه – خط – دو خط موازی – دو خط متقاطع»

www.fera.ir



ب) $x^2 + 8x + 8y = 0$

ج) $y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$

د) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

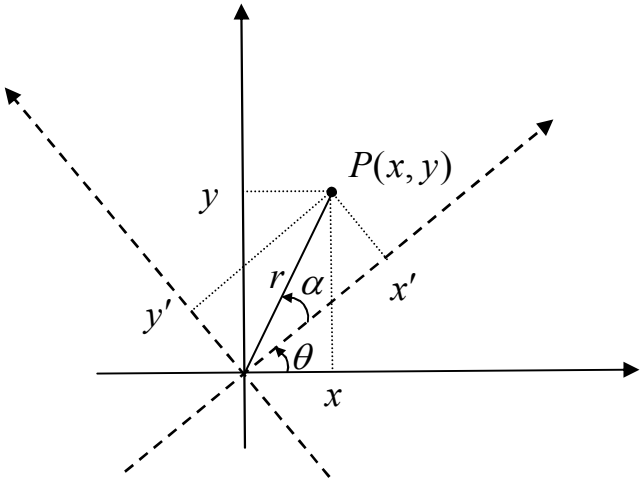
هـ) $16x^2 - 25y^2 - 160x = 0$

ب) اگر معادله ی یک مکان هندسی به صورت $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ باشد، می توان با یک دوران مناسب آن معادله را به صورت استاندارد تبدیل کرد. (روش استفاده از دوران)

گیریم که این دوران به مرکز مبدأ مختصات و به اندازه ی زاویه ی $\theta$ باشد.

$$\cos(\alpha + \theta) = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos(\alpha + \theta)$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin(\alpha + \theta)$$




$$\cos\alpha = \frac{x'}{r} \rightarrow x' = r\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y'}{r} \rightarrow y' = r\sin\alpha$$

www.fera.ir



$$\begin{cases} x = \underbrace{r\cos\alpha}_{x'}.\cos\theta - \underbrace{r\sin\alpha}_{y'}.\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = \underbrace{r\sin\alpha}_{y'}.\cos\theta + \underbrace{r\cos\alpha}_{x'}.\sin\theta = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

برای پیدا کردن زاویه ی $\theta$ فرض می کنیم $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و از رابطه ی $\tan 2\theta = \frac{b}{a-c}$ استفاده کنیم[2]. در نهایت مقدار $x$ و $y$ بدست آمده را در معادله قرار می دهیم.

**تمرین:** با استفاده از دوران مناسب حول محور های مختصات و یافتن معادله ی استاندارد، نشان دهید که معادله ی $x^2 + 3xy + y^2 - 10 = 0$ مربوط به یک هذلولی است.

www.mathtower.org

حل:

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} \to \tan 2\theta = \frac{3}{1-1} = \text{ن} \to 2\theta = \frac{\pi}{2} \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

$$x^2 + 3xy + y^2 - 10 = 0$$

$$\to [\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')]^2 + 3[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')][\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')] + [\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')]^2 - 10 = 0$$

$$\to \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 - 2x'y') + 3 \times \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + 2x'y') - 10 = 0$$

$$\to \frac{5}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - 10 = 0 \to \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{20} = 1$$

معادله یک هذلولی افقی است.

---

[2] . با توجه به علامت عدد بدست آمده برای $\tan 2\theta$ ربع دایره ای که زاویه ی $2\theta$ در آن قرار دارد را نیز باید مشخص کنیم.

www.fera.ir



**تمرین:** با استفاده از دوران مناسب حول محور های مختصات و یافتن معادله ی استاندارد، نشان دهید که معادله ی $۱۷x^۲ - ۶xy + ۹y^۲ = ۷۲$ مربوط به یک بیضی است.

حل:

$$a = ۱۷ \ , \ b = -۶ \ , \ c = ۹ \ , \ d = e = ۰ \ , \ f = ۷۲$$

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} \rightarrow \tan ۲\theta = \frac{-۳}{۴} \xrightarrow{۱+\tan^۲ ۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta}} \cos ۲\theta = -\frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{۲\cos^۲\theta - ۱ = \cos ۲\theta} \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \xrightarrow{\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱} \sin\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

چون $\tan ۲\theta$ منفی است، پس زاویه ی $۲\theta$ در ربع دوم واقع است. لذا $\theta$ در ربع اول قرار دارد.

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x' - \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y' \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x' + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y' \end{cases}$$

$$۱۷x^۲ - ۶xy + ۹y^۲ = ۷۲$$

$$\rightarrow ۱۷(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x' - \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y')^۲ - ۶(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x' - \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y')(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x' + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y') + ۹(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x' + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y')^۲ = ۷۲$$

$$\rightarrow \frac{۱۷}{۱۰}(x' - ۳y')^۲ - \frac{۶}{۱۰}(x' - ۳y')(۳x' + y') + \frac{۹}{۱۰}(۳x' + y')^۲ = ۷۲$$

$$\rightarrow \frac{۱۷}{۱۰}(x'^۲ - ۶x'y' + ۹y'^۲) - \frac{۶}{۱۰}(۳x'^۲ + x'y' - ۹x'y' - ۳y'^۲) + \frac{۹}{۱۰}(۹x'^۲ + ۶x'y' + y'^۲) = ۷۲$$

$$\rightarrow \frac{۱۷}{۱۰}x'^۲ - \frac{۱۰۲}{۱۰}x'y' + \frac{۱۵۳}{۱۰}y'^۲ - \frac{۱۸}{۱۰}x'^۲ - \frac{۶}{۱۰}x'y' + \frac{۵۴}{۱۰}x'y' + \frac{۱۸}{۱۰}y'^۲ + \frac{۸۱}{۱۰}x'^۲ + \frac{۵۴}{۱۰}x'y' + \frac{۹}{۱۰}y'^۲ = ۷۲$$

$$\rightarrow \frac{۸۰}{۱۰}x'^۲ + \frac{۱۸۰}{۱۰}y'^۲ = ۷۲ \rightarrow ۸x'^۲ + ۱۸y'^۲ = ۷۲ \xrightarrow{\div ۷۲} \frac{x'^۲}{۹} + \frac{y'^۲}{۴} = ۱$$

معادله یک بیضی افقی است.

www.fera.ir



**تمرین:** با استفاده از دوران مناسب حول محور های مختصات و یافتن معادله ی استاندارد، نشان دهید که معادله ی $x^۲ + xy + y^۲ = ۶$ مربوط به یک بیضی است. سپس طول قطرها و فاصله ی کانونی آن را تعیین کنید.

حل:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} \to \tan ۲\theta = \frac{۱}{۰} = ن \to ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \to \theta = \frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$

$$x^۲ + xy + y^۲ = ۶$$

$$\to [\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')]^۲ + [\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')][\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')] + [\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')]^۲ = ۶$$

$$\to \frac{۱}{۲}(x'^۲ + y'^۲ - ۲x'y') + \frac{۱}{۲}(x'^۲ - y'^۲) + \frac{۱}{۲}(x'^۲ + y'^۲ + ۲x'y') = ۶$$

$$\to ۳x'^۲ + y'^۲ = ۱۲ \to \frac{x'^۲}{۴} + \frac{y'^۲}{۱۲} = ۱$$

معادله یک بیضی قائم است.

$$a^۲ = ۱۲ \to a = ۲\sqrt{۳} \to AA' = ۲a = ۴\sqrt{۳}$$

$$b^۲ = ۴ \to b = ۲ \to BB' = ۴$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۱۲ = ۴ + c^۲ \to c = ۲\sqrt{۲} \to FF' = ۲c = ۴\sqrt{۲}$$

***

**توجه:** برای تبدیل معادله ی یک مکان هندسی به شکل استاندارد،اگر معادله ی داده شده شامل $xy$ باشد، از دوران و اگر شامل $xy$ نباشد، از مربع کامل کردن استفاده می شود.

www.fera.ir



**نتیجه:** اگر معادله ی یک مکان هندسی به صورت $ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ معلوم باشد و قرار دهیم $\Delta = b^۲ - ۴ac$ با یک دوران مناسب ثابت می شود که:

| علامت $\Delta = b^۲ - ۴ac$ | نوع مکان هندسی |
|---|---|
| مثبت | دو خط متقاطع – هذلولی |
| صفر | تهی – یک خط – دو خط موازی – کل صفحه – سهمی |
| منفی | تهی – نقطه – دایره – بیضی |

**تمرین:** اگر $x^۲ + xy - y^۲ + mx + ny + ۱ = ۰$ مکان هندسی داده شده کدام مورد می تواند باشد؟

الف) هذلولی ب) بیضی ج) سهمی د) دایره

حل: $\Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۵$ $a = b = ۱$ , $c = -۱$

پس مکان هندسی می تواند هذلولی باشد.

***

www.mathtower.org

www.fera.ir

# آموزش

## هندسه ی تحلیلی و جبر خطی

دوره ی پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

فصل چهارم : ماتریس و دترمینان

تهیه کننده: جابر عامری

**دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

**www.mathtower.org**

مهر ۱۳۸۹

www.fera.ir



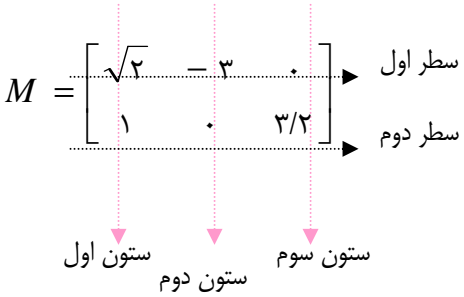
**باسمه تعالی**

## فصل چهارم: ماتریس و دترمینان

### ☑ ماتریس

هر آرایش مستطیل شکلی از اعداد را یک ماتریس می نامند.

مانند:




هر ماتریس را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نمایش می دهند.

هر یک از اعداد ماتریس را یک درایه می نامند.اگر درایه ی $a$ در سطر $i$ و در ستون $j$ قرار دارد. می نویسند.

$$a_{ij}$$

مثلاً در ماتریس فوق داریم: $a_{۲۳} = ۳/۲$ و $a_{۱۲} = -۳$

اگر یک ماتریس دارای $m$ سطر و $n$ ستون باشد، می گویند ماتریس دارای مرتبه ی $m \times n$ است و می نویسند.

$$M = [a_{ij}]_{m \times n}$$

مثلاً ماتریس فوق دارای مرتبه ی $۲ \times ۳$ است و $M = [a_{ij}]_{۲ \times ۳}$ که در آن $i = ۱,۲$ و $j = ۱,۲,۳$

***

**تمرین :** اگر $i$ شماره ی سطر و $j$ شماره ی ستون هر درایه باشند. در هر مورد ماتریس داده شده را تشکیل دهید.

۱) $A = [i^{۲} + j^{۲}]_{۲ \times ۳}$

۲) $B = [۳i + ۲j]_{۲ \times ۲}$

۳) $C = [-ij]_{۳ \times ۳}$

۴) $D = [۳j]_{۳ \times ۲}$

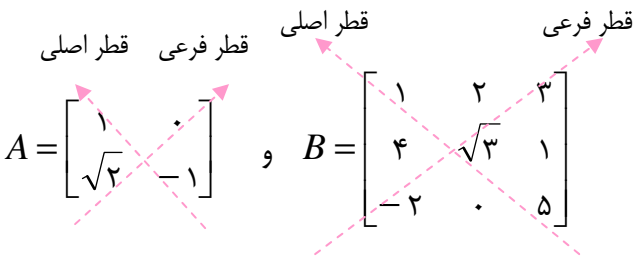
***

www.fera.ir



☑ **ماتریس مربعی**

هرگاه تعداد سطر ها و ستون های یک ماتریس برابر باشند، ماتریس را مربعی می نامند.مانند ماتریس های زیر




$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ \sqrt{۲} & -۱\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & \sqrt{۳} & ۱\\ -۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

در هر ماتریس مربعی دو قطر وجود دارد، قطری که درایه های $a_{ij}$ برای $i=j$ روی آن قرار دارند را قطر اصلی و قطر دیگر را قطر فرعی می نامند.

***

☑ **ماتریس های مساوی**

دو ماتریس را مساوی می گویند، هرگاه:

۱- هم مرتبه باشند.

۲- درایه های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.یعنی $\forall i,j$

$$(A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij})$$

مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

**تمرین :** دو ماتریس زیر مساویند. مقدار $a$ و $b$ را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & a\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۳\\ ۲ & ۲a+b & ۵\end{bmatrix}$$

***

www.fera.ir



☑ **ماتریس های خاص**

۱) ماتریس صفر: ماتریسی است که همه ی درایه های آن صفر باشند. مثلاً:

$$O=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

۲) ماتریس سطری : ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

۳) ماتریس ستونی : ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مثلاً:

$$B=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\\ ۴\end{bmatrix}$$

۴) ماتریس واحد(همانی): یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های روی قطر اصلی آن یک و بقیه ی درایه های آن صفر باشند. مثلاً

$$I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

۵) ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

۶) ماتریس پایین مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. مثلاً

$$B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۵ & ۶ & ۳\end{bmatrix}$$

www.fera.ir



۷) ماتریس بالا مثلثی : یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند.مثلاً

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس اسکالر : یک ماتریس قطری است که تمام درایه های روی قطر اصلی آن برابر باشند. مثلاً

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

***

☑ **ضرب عدد در ماتریس(ضرب اسکالر)**

در ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس،آن عدد در تمام درایه های ماتریس ضرب می شود.

$$A=[a_{ij}], \lambda \in R$$
$$\lambda A=\lambda[a_{ij}]=[\lambda a_{ij}]$$

اگر $\lambda=-۱$ باشد.ماتریس حاصل را ماتریس قرینه می نامند.

$$\lambda A=-۱A=-۱[a_{ij}]=[-a_{ij}]=-A$$

☑ **جمع و تفریق دو ماتریس**

دو ماتریس را وقتی می توان جمع یا تفریق کرد که هم مرتبه باشند.در این صورت درایه های متناظر آنها جمع یا تفریق می شوند.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}$$
$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$
$$A-B=A+(-B)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

**تمرین:**

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ مطلوبست تعیین

الف) $۲A$ ب) $A+۲B$ ج) $۲A-۳B$ د) $A-B+C$

www.fera.ir



**قضیه:** اگر $C$ و $B$ و $A$ سه ماتریس هم مرتبه و $s$ و $r$ دو عدد حقیقی باشند. در این صورت:

۱) خاصیت جابجایی جمع ماتریس ها $A+B=B+A$

۲) خاصیت شرکت پذیری جمع ماتریس ها $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳) جمع ماتریس با ماتریس صفر $A+O=O+A=A$

۴) جمع ماتریس های قرینه $A+(-A)=(-A)+A=O$

۵) ضرب عدد در جمع دو ماتریس $r(A+B)=rA+rB$

۶) ضرب ماتریس در جمع دو عدد $(r+s)A=rA+sA$

۷) ضرب ماتریس در حاصل ضرب دو عدد $(rs)A=r(sA)$

۸) ضرب عدد یک در ماتریس $1A=A$

**تمرین:** قضیه ی فوق را ثابت کنید.

اثبات۵)

$$r(A+B)=r[a_{ij}+b_{ij}]=[r(a_{ij}+b_{ij})]=[ra_{ij}+rb_{ij}]$$
$$=[ra_{ij}]+[rb_{ij}]=r[a_{ij}]+r[b_{ij}]=rA+rB$$

اثبات۶)

$$(r+s)A=(r+s)[a_{ij}]=[(r+s)a_{ij}]$$
$$=[(ra_{ij})+(sa_{ij})]=[ra_{ij}]+[sa_{ij}]=r[a_{ij}]+s[a_{ij}]=rA+sA$$

**تمرین:** نشان دهید که قانون حذف در جمع ماتریس ها برقرار است.

حل: فرض کنید $C$ و $B$ و $A$ سه ماتریس هم مرتبه باشند، نشان می دهیم که

$$A+B=A+C\rightarrow B=C$$

برای این کار کافی است طرفین تساوی $A+B=A+C$ را با $-A$ جمع کنیم.

$$-A+(A+B)=-A+(A+C)$$
$$\rightarrow(-A+A)+B=(-A+A)+C$$
$$\rightarrow O+B=O+C\rightarrow B=C$$



www.mathtower.org

www.fera.ir



**تمرین:** اگر $r$ یک عدد حقیقی ناصفر و $A$ و $B$ دو ماتریس دلخواه هم مرتبه باشند.ثابت کنید که:

$$rA = rB \rightarrow A = B$$

حل: چون $r \neq ۰$ پس $\frac{۱}{r}$ وجود دارد بنابراین:

$$rA = rB \rightarrow \frac{۱}{r}(rA) = \frac{۱}{r}(rB) \rightarrow (\frac{۱}{r}r)A = (\frac{۱}{r}r)B \rightarrow ۱A = ۱B \rightarrow A = B$$

***

☑ **ضرب ماتریس ها**

دو ماتریس را وقتی می توان ضرب کرد که تعداد ستون های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.در این صورت هر درایه ی ماتریس حاصل ضرب از جمع ضرب های درایه های متناظر سطر $i$ از اولی در ستون $j$ از دومی(به شکل ضرب داخلی دو بردار) بدست می آید.

$$A = [a_{ij}]_{m\times p}, B = [b_{ij}]_{p\times n}$$

$$\rightarrow A\times B = [c_{ij}]_{m\times n} \qquad c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

**تمرین:** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را در صورت امکان بدست آورید.

الف) $A\times B =$ ب) $B\times A =$ ج) $A^{۲} =$

**توجه۱:** ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد.

**تمرین:** اگر $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه مقدار $y$ و $x$ را بیابید.

**توجه۲:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی و $r$ یک عدد حقیقی و $n$ یک عدد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $A^{۱} = A$ ۲) $A^{n} = A^{n-۱}\times A$ ۳) $I^{n} = I$ ۴) $(rA)^{n} = r^{n}A^{n}$

**تمرین:** اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^{۳}$ را تعیین کنید.

www.fera.ir



**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}$ در این صورت ثابت کنید که $A^۶ = ۶۴I$

حل:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = ۴\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۴I$$

$$\Rightarrow A^۶ = (A^۲)^۳ = (۴I)^۳ = ۶۴I^۳ = ۶۴I$$

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $(A^۲ + AB + ۲B)^{۱۰۰}$ را بیابید.

**تمرین:** اگر $A^۲ = ۳A$ در این صورت $A^{۱۰۰}$ را بیابید.

حل:

$$A^{۱۰۰} = (A^۲)^{۵۰} = (۳A)^{۵۰} = ۳^{۵۰}A^{۵۰} = ۳^{۵۰}(A^۲)^{۲۵} = ۳^{۵۰}(۳A)^{۲۵} = ۳^{۵۰} \times ۳^{۲۵}A^{۲۵} = ۳^{۷۵}A^{۲۵}$$
$$= ۳^{۷۵}A^{۲۴} \times A = ۳^{۷۵}(A^۲)^{۱۲} \times A = ۳^{۷۵}(۳A)^{۱۲} \times A = ۳^{۷۵} \times ۳^{۱۲} \times A^{۱۲} \times A = ۳^{۸۷}A^{۱۲} \times A$$
$$= ۳^{۸۷}(A^۲)^۶ \times A = ۳^{۸۷}(۳A)^۶ \times A = ۳^{۸۷} \times ۳^۶ \times A^۶ \times A = ۳^{۹۳}A^۶ \times A = ۳^{۹۳}(A^۲)^۳ \times A$$
$$= ۳^{۹۳}(۳A)^۳ \times A = ۳^{۹۳} \times ۳^۳ \times A^۳ \times A = ۳^{۹۶}A^۳ \times A = ۳^{۹۶}A^۳ \times A = ۳^{۹۶}A^۲ \times A \times A$$
$$= ۳^{۹۶}A^۲ \times A^۲ = ۳^{۹۶}(۳A) \times (۳A) = ۳^{۹۸}A \times A = ۳^{۹۸}A^۲ = ۳^{۹۸}(۳A) = ۳^{۹۹}A$$

**تمرین:** اگر $A^۲ = ۳A$ در این صورت به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که $A^n = ۳^{n-۱}A$.

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix} mn & n^۲ \\ -m^۲ & -mn \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^۲ = O$

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^۳ = O$

www.fera.ir



**توجه:** در حالت های خاص می توان ماتریس $A^n$ را بطور مستقیم تعیین کرد. برای مثال :

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}۲^n & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\Rightarrow B^n=\begin{bmatrix}n+۱ & -n\\ n & -n+۱\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow C^n=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲n & ۱\end{bmatrix}$$

**تمرین:** هر یک از موارد فوق را به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید.

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۲۰۰۶}$ را تعیین کنید.

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۱\\ ۰ & a\end{bmatrix}$ و $a\neq ۰$ به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$A^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-۱}\\ ۰ & a^n\end{bmatrix}$$

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix}Cos\alpha+Sin\alpha & \sqrt{۲}Sin\alpha\\ -\sqrt{۲}Sin\alpha & Cos\alpha-Sin\alpha\end{bmatrix}$ به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$A^n=\begin{bmatrix}Cos(n\alpha)+Sin(n\alpha) & \sqrt{۲}Sin(n\alpha)\\ -\sqrt{۲}Sin(n\alpha) & Cos(n\alpha)-Sin(n\alpha)\end{bmatrix}$$

**قضیه:** فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times q}$ سه ماتریس باشند. در این صورت

$$A(BC)=(AB)C$$

اثبات: فرض می کنیم $A(BC)=[e_{ij}]_{m\times q}$ و $(AB)C=[g_{ij}]_{m\times q}$ و $BC=[d_{ij}]_{n\times q}$ و $AB=[f_{ij}]_{m\times p}$ در این صورت:

www.fera.ir



$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\sum_{t=1}^{p}b_{kt}c_{tj})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}a_{ik}(b_{kt}c_{tj})$$

$$=\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kt}c_{tj})=\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kt})c_{tj}=\sum_{t=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kt})c_{tj}=\sum_{t=1}^{p}f_{it}c_{tj}=g_{ij}$$

**قضیه:** فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{n\times q}$ سه ماتریس باشند.در این صورت

$$A(B+C)=AB+AC$$

اثبات: فرض می کنیم $A(B+C)=[e_{ij}]_{m\times p}$ و $B+C=[d_{ij}]_{n\times p}$ و $AB=[f_{ij}]_{m\times p}$ و

$AC=[g_{ij}]_{m\times p}$ و $AB+AC=[h_{ij}]_{m\times p}$

در این صورت:

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}=f_{ij}+g_{ij}=h_{ij}$$

**توجه ۱:** ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس ، ماتریس صفر باشد، ولی هیچکدام از ماتریس ها صفر نباشند.

$$AB=O \nrightarrow A=O \quad \vee \quad B=O$$

**مثال:** دو ماتریس زیر صفر نیستند ولی حاصل ضرب آنها ماتریس صفر است.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

**توجه ۲:** قاعده ی حذف در ضرب ماتریس ها بر قرار نمی باشد. $AB=AC \nrightarrow B=C$

**مثال:** اگر $C=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ بدیهی است که تساوی $AB=AC$ برقرار است ولی $B\neq C$

www.mathtower.org

www.fera.ir



**قضیه:** فرض کنیم که $A$ یک ماتریس مربعی مرتبه ی $n$ باشد. در این صورت: $AI_n = I_n A = A$

اثبات: فرض کنیم که $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $AI_n=[b_{ij}]_{n\times n}$ در این صورت:

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}}_{k=j}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}}_{k\neq j}=a_{ij}\delta_{jj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}(1)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(0)=a_{ij}+0=a_{ij}$$

**قضیه:** فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ دو ماتریس و $r$ و $s$ دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(rA)(sB)=rs(AB)$$

اثبات: فرض می کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ و $AB=[c_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت:

$$rA=[ra_{ij}]_{m\times p}$$

$$sB=[sb_{ij}]_{p\times n}$$

$$(rA)(sB)=[\sum_{k=1}^{n}(ra_{ik})(sb_{kj})]=[\sum_{k=1}^{n}rs(a_{ik}b_{kj})]=[rs\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj})]=rs[\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj})]=rs(AB)$$

***

☑ **ترانهاده ی یک ماتریس**

اگر جای سطر ها و ستون های یک ماتریس را جا به جا کنیم، ماتریس دیگری حاصل می شود که آنرا ماتریس ترانهاده می نامند.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\rightarrow A^t=[b_{ij}]_{n\times m}$$
$$a_{ij}=b_{ji}$$

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ در این صورت ترانهاده ی ماتریس $A$ را بنویسید.

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $A^2-A^t+I_2$ را بدست آورید.

www.fera.ir



**قضیه:** اگر $B$ و $A$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $r$ یک عدد حقیقی باشند. در این صورت:

۱) $(A+B)^t = A^t + B^t$

۲) $(rA)^t = rA^t$

۳) $(AB)^t = B^t A^t$

۴) $(A^t)^t = A$

۵) $(A^t)^n = (A^n)^t$

اثبـــات۳) قـــرار مـــی دهـــیم: $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ و $(AB)^t=[d_{ij}]_{n\times n}$ و $AB=[c_{ij}]_{n\times n}$ و

$$A^t=[e_{ij}]_{n\times n} \text{ و } B^t=[f_{ij}]_{n\times n} \text{ و } B^tA^t=[g_{ij}]_{n\times n}$$

در این صورت

$$d_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}e_{kj}=g_{ij}$$

**تمرین:** تساوی مقابل را ثابت کنید. $(AB^t - BA^t)^t = BA^t - AB^t$

***

☑ **ماتریس های متقارن و ماتریس های پادمتقارن**

یک ماتریس مربعی را متقارن می گویند، هرگاه با ترانهاده اش برابر باشد.

$$A^t = A$$

اگر ترانهاده ی یک ماتریس مربعی با قرینه ی آن ماتریس برابر باشد، آن ماتریس را پاد متقارن گویند.

$$A^t = -A$$

**تمرین:** نشان دهید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ متقارن و ماتریس $B=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ پادمتقارن است.

**تمرین:** نشان دهید که ماتریس $C=\begin{bmatrix}۰ & -۳ & ۲\\ ۳ & ۰ & -۵\\ -۲ & ۵ & ۰\end{bmatrix}$ پادمتقارن است.

**نتیجه :** ماتریس واحد ، متقارن است. $I^t = I$

**تمرین:** ثابت کنید که ماتریس مربعی صفر هم متقارن و هم پادمتقارن است.

www.fera.ir



حل : فرض می کنیم که $A$ یک ماتریس مربعی دلخواه بوده که هم متقارن و هم پادمتقارن مـی باشـد. ثابـت مـی کنـیم کـه ایـن ماتریس باید ماتریس صفر باشد.

$\rightarrow A^t = A \rightarrow A = A^t$ ماتریس $A$ متقارن است.

$\rightarrow A^t = -A \rightarrow A = -A^t$ ماتریس $A$ پادمتقارن است.

$\rightarrow A + A = A^t + (-A^t) \rightarrow ۲A = O \rightarrow A = O$

**تمرین:** ثابت کنید که

الف : اگر ماتریس $A$ متقارن باشد، ماتریس $rA$ نیز متقارن می باشد.

ب : اگر ماتریس $A$ پادمتقارن باشد، ماتریس $rA$ نیز پادمتقارن می باشد.

حل :

الف:

ماتریس $rA$ متقارن است. $(rA)^t = rA^t = rA$

ب:

ماتریس $rA$ پادمتقارن است. $(rA)^t = rA^t = r(-A) = -rA$

**تمرین:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد. نشان دهید که

الف) ماتریس $M = A + A^t$ متقارن است.

ب) ماتریس $N = A - A^t$ پاد متقارن است.

حل:

الف) $$M^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = M$$

ب) $$N^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t) = -N$$

**تمرین:** نشان دهید که هر ماتریس مربعی را می توان به شکل مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

حل:

www.fera.ir



باتوجه به تمرین های قبل اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس های $\frac{۱}{۲}M=\frac{۱}{۲}(A+A^t)$ متقارن و ماتریس $\frac{۱}{۲}N=\frac{۱}{۲}(A-A^t)$ پادمتقارن است. در این صورت:

$$\frac{۱}{۲}M+\frac{۱}{۲}N=\frac{۱}{۲}(A+A^t)+\frac{۱}{۲}(A-A^t)=\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}A^t+\frac{۱}{۲}A-\frac{۱}{۲}A^t=۲(\frac{۱}{۲}A)=A$$

$$A=\frac{۱}{۲}(M+N)$$

**تمرین:** ماتریس زیر را به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$$

**تمرین:** ماتریس زیر را به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۳ & -۱ & ۲\\ ۱ & -۲ & ۰\end{bmatrix}$$

**تمرین:** اگر $B$ و $A$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $AB=BA$ آنگاه ثابت کنید:

الف) اگر $B$ و $A$ هر دو متقارن باشند،آنگاه $AB$ نیز متقارن است.

ب) اگر $B$ و $A$ هر دو پادمتقارن باشند،آنگاه $AB$ متقارن است.

حل:

الف) $AB$ متقارن است. $(AB)^t=B^tA^t=BA=AB\rightarrow$

ب) $AB$ متقارن است. $(AB)^t=B^tA^t=(-B)(-A)=BA=AB\rightarrow$

***

**تمرین:** اگر $B$ و $A$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه و پادمتقارن باشند و داشته باشیم $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ثابت کنید ماتریس $AB$ متقارن است.

حل: می دانیم که $(A+B)^۲=A^۲+AB+BA+B^۲$ حال چون $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ پس :

www.fera.ir



$$A^۲ + ۲AB + B^۲ = A^۲ + AB + BA + B^۲ \rightarrow ۲AB = AB + BA \rightarrow ۲AB - AB = BA \rightarrow AB = BA$$

لذا می توان نوشت :

$$(AB)^t = B^t A^t = (-B)(-A) = BA = AB \rightarrow$$ $AB$ متقارن است.

***

☑ **دترمینان**

برای هر ماتریس مربعی $n \times n$ مانند $A$ عددی به نام دترمینان آن ماتریس نسبت داده می شود. این عدد که با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش داده می شود. این عدد با توجه به مرتبه ی ماتریس به روشی خاص بدست می آید. در اینجا این روشها را توضیح می دهیم.

***

*** دترمینان ماتریس ۱×۱**

دترمینان ماتریس ۱×۱ برابر تنها درایه ی آن ماتریس تعریف می شود.

$$A = [۵] \rightarrow |A| = ۵$$

***

*** دترمینان ماتریس ۲×۲**

دترمینان ماتریس ۲×۲ با تفاضل حاصل ضرب درایه های قطر فرعی از حاصل ضرب درایه های قطر اصلی بدست می آید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

**تمرین:** دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$

ب) $B = \begin{bmatrix} Sin\theta & -Cos\theta \\ Cos\theta & Sin\theta \end{bmatrix}$

**تمرین:** معادله ی زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & ۲-x \\ -۳ & x-۲ \end{vmatrix} = ۰$$

***

www.fera.ir



*** دترمینان ماتریس ۳×۳**

برای تعریف دترمینان ماتریس ۳×۳ نیاز به معرفی مفاهیم مختلفی داریم . در ابتدا این مفاهیم را بیان می کنیم.

## تعریف ماتریس کهاد(مینور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی، ماتریسی که از حذف سطر $i$ام و ستون $j$ ام بدست می آید را کهاد درایه ی $a_{ij}$ نامند و آنرا با $M_{ij}$ نمایش می دهند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۳ \\ ۲ & ۷ & -۴ \end{bmatrix}$ در این صورت:

$$M_{۱۱}=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۷ & -۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_{۲۳}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

***

## تعریف همسازه ی(کوفاکتور ) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی همسازه ی درایه ی $a_{ij}$ عددی است که به شکل زیر بدست می آید.

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

مثال: همسازه ی درایه ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر به صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\,|M_{۲۳}|=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=-(۱-۴)=۳$$

***

www.fera.ir



## روش محاسبه دترمینان ماتریس $۳\times۳$ به کمک بسط نسبت به یک سطر یا یک ستون

با توجه به درایه های یک سطر(یا یک ستون) دلخواه و کهاد آنها می توان دترمینان یک ماتریس $۳\times۳$ را محاسبه کرد[۱].

فرض کنید: $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ در این صورت:

بسط نسبت به یک سطر دلخواه $(i=۱ \text{ یا } i=۲ \text{ یا } i=۳)$ $|A|=\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}A_{ij}$

بسط نسبت به یک ستون دلخواه $(j=۱ \text{ یا } j=۲ \text{ یا } j=۳)$ $|A|=\sum_{i=۱}^{۳} a_{ij}A_{ij}$

مثال: بسط نسبت به سطر اول $i=۱$

$$|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$$

این روش محاسبه ی دترمینان یک ماتریس مربعی را روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون یا به اختصار روش بسط[۲] می نامند.

**تمرین:** ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

الف) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک سطر دلخواه بدست آورید.

ب) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک ستون دلخواه بدست آورید.

**تمرین:** به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{bmatrix}$$

***

[۱] – برای ماتریس مربعی $n\times n$ نیز به همین شکل عمل می شود.

[2] . الف : در روش بسط بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر های بیشتری داشته باشد.

ب : محاسبه ی دترمینان های ماتریس مربعی مرتبه ی ۴ و بالاتر نیز به همین شکل انجام می شود.

www.fera.ir



## ☑ ویژگی های دترمینان

در محاسبه ی دترمینان یک ماتریس به کمک بسط نسبت به یک سطر یا یک ستون با ویژگی های جالبی برخورد می کنیم.این ویژگی ها بویژه برای محاسبه ی دترمینان بدون استفاده از بسط بکار گرفته می شوند. این ویژگی ها عبارتند از:

* **ویژگی اول:** دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی ، پایین مثلثی و قطری برابر با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{vmatrix} = abc$$

* **ویژگی دوم :** هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی برابر صفر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۷ \end{vmatrix} = ۰$$

* **ویژگی سوم :** هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی در عدد ثابت $k$ ضرب شوند.آنگاه دترمینان آن ماتریس $k$ برابر می شود.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱۰ & ۲۰ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{\frac{۱}{۵}R2 \to R2}{=} ۵ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix}$$

**نتیجه:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. در این صورت: $|rA| = r^n |A|$

* **ویژگی چهارم :** اگر در یک ماتریس مربعی جای دو سطر یا دو ستون را جابجا کنیم، دترمینان آن در عدد (۱-) ضرب می شود.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R3}{=} - \begin{vmatrix} ۳ & ۹ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

* **ویژگی پنجم :** اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

www.fera.ir



مثلاً: $\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R1=R2}{=} ۰$

* **ویژگی ششم :** اگر در یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون ضریبی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، دترمینان آن صفر است.

مثلاً: $\begin{vmatrix} -۱ & -۳ & ۲ \\ -۱ & -۳ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳C1=C2}{=} ۰$

* **ویژگی هفتم :** اگر در یک ماتریس مربعی مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم،دترمینان آن تغییر نمی کند.

مثلاً: $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳R2+R1\to R1}{=} \begin{vmatrix} -۲ & ۹ & ۸ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$

* **ویژگی هشتم :** دترمینان هر ماتریس مربعی و دترمینان ترانهاده اش با هم برابرند. $|A^t|=|A|$

مثلاً: $\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$

* **ویژگی نهم :** دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم مرتبه با حاصل ضرب دترمینان های آنها برابر است.

$$|AB|=|A||B|$$

**توجه:** این ویژگی فقط برای ضرب ماتریس ها برقرار است ولی برای جمع یا دو تفاضل دو ماتریس مربعی هم مرتبه برقرار نمی باشد.یعنی:

$$|A+B|\neq|A|+|B|$$
$$|A-B|\neq|A|-|B|$$

* **ویژگی دهم :** برای هر ماتریس مربعی $A$ داریم:

$$|A^k|=|A|^k$$

www.fera.ir



* **ویژگی یازدهم:** اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون به صورت دو یا چند جمله ای باشند،آنگاه دترمینان این ماتریس را می توان به صورت مجموع چند دترمینان نوشت.

مثلاً:
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

**تمرین:** بدون بسط دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ?$$

حل:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} \overset{\substack{۳R1+R2\to R2 \\ = \\ ۲R1+R3\to R3}}{} \begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{vmatrix} = (-۱)(۱)(۱۰) = -۱۰$$

**تمرین:** به کمک ویژگی های دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

حل:

www.fera.ir



$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix} \underset{-C1+C3\to C3}{\overset{-C1+C2\to C2}{=}} \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x & y-x & z-x \\ x^۲ & y^۲-x^۲ & z^۲-x^۲ \end{vmatrix}$$

$$\underset{\frac{C3}{z-x}\to C3}{\overset{\frac{C2}{y-x}\to C2}{=}} (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۱ \\ x^۲ & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{-C2+C3\to C3} (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ x & ۱ & ۰ \\ x^۲ & y+x & z-y \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

**تمرین:** بدون بسط دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} Sin^۲x & ۱ & Cos^۲x \\ Sin^۲y & ۱ & Cos^۲y \\ Sin^۲z & ۱ & Cos^۲z \end{vmatrix} = ۰$$

حل:

$$\begin{vmatrix} Sin^۲x & ۱ & Cos^۲x \\ Sin^۲y & ۱ & Cos^۲y \\ Sin^۲z & ۱ & Cos^۲z \end{vmatrix} \underset{=}{C۱+C۳\to C۳} \begin{vmatrix} Sin^۲x & ۱ & Sin^۲x+Cos^۲x \\ Sin^۲y & ۱ & Sin^۲y+Cos^۲y \\ Sin^۲z & ۱ & Sin^۲z+Cos^۲z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Sin^۲x & ۱ & ۱ \\ Sin^۲y & ۱ & ۱ \\ Sin^۲z & ۱ & ۱ \end{vmatrix} \underset{=}{C۲=C۳} ۰$$

**تمرین:** بدون بسط دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} Sin^۲x & ۲ & a & Cos^۲x \\ Sin^۲y & ۲ & b & Cos^۲y \\ Sin^۲z & ۲ & c & Cos^۲z \\ Sin^۲t & ۲ & d & Cos^۲t \end{vmatrix} = ۰$$

حل:

www.fera.ir



$$\begin{vmatrix} Sin^2x & 2 & a & Cos^2x \\ Sin^2y & 2 & b & Cos^2y \\ Sin^2z & 2 & c & Cos^2z \\ Sin^2t & 2 & d & Cos^2t \end{vmatrix} \overset{C1+C4\to C4}{=} \begin{vmatrix} Sin^2x & 2 & a & Sin^2x+Cos^2x \\ Sin^2y & 2 & b & Sin^2y+Cos^2y \\ Sin^2z & 2 & c & Sin^2z+Cos^2z \\ Sin^2t & 2 & d & Sin^2t+Cos^2t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Sin^2x & 2 & a & 1 \\ Sin^2y & 2 & b & 1 \\ Sin^2z & 2 & c & 1 \\ Sin^2t & 2 & d & 1 \end{vmatrix} \overset{C2=2C4}{=} 0$$

**تمرین:** به کمک ویژگی های دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 8+3x \\ 2y & 7 & 14+6y \\ 3z & 9 & 18+9z \end{vmatrix} = 0$$

حل:

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 8+3x \\ 2y & 7 & 14+6y \\ 3z & 9 & 18+9z \end{vmatrix} \overset{3C1+2C2\to C2}{=} \begin{vmatrix} x & 8+3x & 8+3x \\ 2y & 14+6y & 14+6y \\ 3z & 18+9z & 18+9z \end{vmatrix} \overset{C2=C3}{=} 0$$

**تمرین:** به کمک ویژگی های دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

حل:

www.fera.ir



$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲x & yz \\ ۱ & y & ۲xz \\ ۱ & z & ۲xy \end{vmatrix} \underset{\substack{yR۲\to R۲ \\ zR۳\to R۳}}{\overset{۲xR۱\to R۱}{=}} \frac{۱}{۲xyz} \begin{vmatrix} ۲x & ۴x^{۲} & ۲xyz \\ y & y^{۲} & ۲xyz \\ z & z^{۲} & ۲xyz \end{vmatrix} \underset{\frac{C۳}{۲xyz}\to C۳}{=} \frac{۱}{۲xyz} \times ۲xyz \begin{vmatrix} ۲x & ۴x^{۲} & ۱ \\ y & y^{۲} & ۱ \\ z & z^{۲} & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{C۲\leftrightarrow C۳} - \begin{vmatrix} ۲x & ۱ & ۴x^{۲} \\ y & ۱ & y^{۲} \\ z & ۱ & z^{۲} \end{vmatrix} \underset{=}{C۱\leftrightarrow C۲} -(-۱) \begin{vmatrix} ۱ & ۲x & ۴x^{۲} \\ ۱ & y & y^{۲} \\ ۱ & z & z^{۲} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲x & ۴x^{۲} \\ ۱ & y & y^{۲} \\ ۱ & z & z^{۲} \end{vmatrix}$$

**تمرین:** به کمک ویژگی های دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱+x & y & z \\ x & ۱+y & z \\ x & y & ۱+z \end{vmatrix} = ۱+x+y+z$$

حل:

$$\begin{vmatrix} ۱+x & y & z \\ x & ۱+y & z \\ x & y & ۱+z \end{vmatrix} \underset{C1+C2+C3\to C1}{=} \begin{vmatrix} (۱+x)+y+z & y & z \\ x+(۱+y)+z & ۱+y & z \\ x+y+(۱+z) & y & ۱+z \end{vmatrix}$$

$$\underset{\frac{C1}{۱+x+y+z}\to C1}{=} (۱+x+y+z) \begin{vmatrix} ۱ & y & z \\ ۱ & ۱+y & z \\ ۱ & y & ۱+z \end{vmatrix} \underset{\substack{-R1+R2\to R2 \\ -R1+R3\to R3}}{=} (۱+x+y+z) \begin{vmatrix} ۱ & y & z \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= (۱+x+y+z)(۱) = ۱+x+y+z$$

**تمرین :** بدون بسط ثابت کنید که $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۵$

**حل:**

www.fera.ir



$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} \overset{R۱\leftrightarrow R۳}{=} - \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \overset{۲R۱+R۲\to R۲}{=} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -(-۵) = ۵$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

حل:

$$\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix} \overset{\substack{-R۱+R۲\to R۲ \\ -R۱+R۳\to R۳}}{=} \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & b-a & b^۲-a^۲ \\ ۰ & c-a & c^۲-a^۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & b-a & (b-a)(b+a) \\ ۰ & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & ۱ & b+a \\ ۰ & ۱ & c+a \end{vmatrix} \overset{-R۲+R۳\to R۳}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & ۱ & b+a \\ ۰ & ۰ & (c+a)-(b+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۰ & ۱ & b+a \\ ۰ & ۰ & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix} = ۰$$

حل:

www.fera.ir



$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & a-d & m(b+c) \\ m & b-d & m(a+c) \\ m & c-d & m(a+b) \end{vmatrix} = m^{2} \begin{vmatrix} 1 & a-d & b+c \\ 1 & b-d & a+c \\ 1 & c-d & a+b \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{C2+C3\to C2} m^{2} \begin{vmatrix} 1 & a-d+b+c & b+c \\ 1 & b-d+a+c & a+c \\ 1 & c-d+a+b & a+b \end{vmatrix} = m^{2}(a+b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & a+c \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= m^{2}(a+b+c-d) \times 0 = 0$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} Sinx & Cosx & Sin(x+t) \\ Siny & Cosy & Sin(y+t) \\ Sinz & Cosz & Sin(z+t) \end{vmatrix} = 0$$

حل:

$$\begin{vmatrix} Sinx & Cosx & Sin(x+t) \\ Siny & Cosy & Sin(y+t) \\ Sinz & Cosz & Sin(z+t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Sinx & Cosx & SinxCost+Cosx\ Sint \\ Siny & Cosy & SinyCost+Cosy\ Sint \\ Sinz & Cosz & SinzCost+Cosz\ Sint \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} Sinx & Cosx & SinxCost \\ Siny & Cosy & SinyCost \\ Sinz & Cosz & SinzCost \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Sinx & Cosx & Cosx\ Sint \\ Siny & Cosy & Cosy\ Sint \\ Sinz & Cosz & Cosz\ Sint \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} 1 & \log x & \log yz \\ 1 & \log y & \log xz \\ 1 & \log z & \log xy \end{vmatrix} = 0$$

حل:

www.mathtower.org

www.fera.ir



$$\begin{vmatrix} ۱ & \log x & \log yz \\ ۱ & \log y & \log xz \\ ۱ & \log z & \log xy \end{vmatrix} \underset{=}{C۲+C۳\to C۳} \begin{vmatrix} ۱ & \log x & \log yz+\log x \\ ۱ & \log y & \log xz+\log y \\ ۱ & \log z & \log xy+\log z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & \log x & \log xyz \\ ۱ & \log y & \log xyz \\ ۱ & \log z & \log xyz \end{vmatrix}$$

$$= \log xyz \begin{vmatrix} ۱ & \log x & ۱ \\ ۱ & \log y & ۱ \\ ۱ & \log z & ۱ \end{vmatrix} = \log xyz \times ۰ = ۰$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x^۲(y+z) \\ ۱ & ۱+y & y^۲(x+z) \\ ۱ & ۱+z & z^۲(x+y) \end{vmatrix} = ۰$$

حل :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x^۲(y+z) \\ ۱ & ۱+y & y^۲(x+z) \\ ۱ & ۱+z & z^۲(x+y) \end{vmatrix} \underset{=}{(xyz)C۱+C۳\to C۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x^۲y+x^۲z+xyz \\ ۱ & ۱+y & xy^۲+y^۲z+xyz \\ ۱ & ۱+z & xz^۲+z^۲y+xyz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x^۲y+x^۲z+xyz \\ ۱ & ۱+y & xy^۲+y^۲z+xyz \\ ۱ & ۱+z & xz^۲+z^۲y+xyz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x(xy+xz+yz) \\ ۱ & ۱+y & y(xy+yz+xz) \\ ۱ & ۱+z & z(xz+zy+xy) \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{\frac{۱}{xy+xz+yz}C۳} (xy+xz+yz) \begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x \\ ۱ & ۱+y & y \\ ۱ & ۱+z & z \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{-C۳+C۲\to C۲} (xy+xz+yz) \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & x \\ ۱ & ۱ & y \\ ۱ & ۱ & z \end{vmatrix} \underset{=}{C۱=C۲} (xy+xz+yz)(۰) = ۰$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} yz & x^۲ & x^۲ \\ y^۲ & xz & y^۲ \\ z^۲ & z^۲ & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

www.fera.ir



حل :

$$\begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{yz}R1\to R1\ ,\ \frac{1}{xz}R2\to R2\ ,\ \frac{1}{xy}R3\to R3}{=} = (yz)(xz)(xy)\begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{z} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{z} & 1 & \frac{y}{x} \\ \frac{z}{y} & \frac{z}{x} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{yzC1\to C1\ ,\ xzC2\to C2\ ,\ xyC3\to C3}{=} (yz)(xz)(xy)\times\frac{1}{(yz)(xz)(xy)}\begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

**تمرین:** بدون بسط ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

حل :

$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} \overset{|A|=|A^t|}{=} \begin{vmatrix} x+y+2z & z & z \\ x & 2x+y+z & x \\ y & y & x+2y+z \end{vmatrix}$$

$$\overset{R1+R2+R3\to R1}{=} \begin{vmatrix} 2x+2y+2z & 2x+2y+2z & 2x+2y+2z \\ x & 2x+y+z & x \\ y & y & x+2y+z \end{vmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2x+2y+2z}R1\to R1}{=} (2x+2y+2z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2x+y+z & x \\ y & y & x+2y+z \end{vmatrix}$$

www.fera.ir



$$\begin{matrix}-C۱+C۲\to C۲\\ = \\ -C۱+C۳\to C۳\end{matrix} ۲(x+y+z)\begin{vmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ x & x+y+z & ۰\\ y & ۰ & x+y+z\end{vmatrix}$$

$$=۲(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)=۲(x+y+z)^{۳}$$

**تمرین:** اگر $\begin{vmatrix}۱ & b & a+۱\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}=۸$ باشد. مقدار $\begin{vmatrix}۱ & b & a\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$\underbrace{\begin{vmatrix}۱ & b & a+۱\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}}_{۸}=\underbrace{\begin{vmatrix}۱+۰ & b+۰ & a+۱\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}}_{۸}=\underbrace{\begin{vmatrix}۱ & b & a\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}}_{x}+\underbrace{\begin{vmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}}_{۵}$$

$$\to ۸=x+۵\to x=۳$$

توجه : دترمینان ماتریس زیر را به شکل زیر محاسبه می کنیم.

$$\begin{vmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\end{vmatrix}=۱(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۲\end{vmatrix}=۴+۱=۵$$

**تمرین:** اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند، به کمک ویژگی های دترمینان ، مقدار دترمینان ماتریس $A=[ai+bj]_{۳\times ۳}$ را محاسبه کنید. ( $i$ شماره ی سطر و $j$ شماره ی ستون هر درایه می باشند.)

حل:

$$A=[ai+bj]_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix}a(۱)+b(۱) & a(۱)+b(۲) & a(۱)+b(۳)\\ a(۲)+b(۱) & a(۲)+b(۲) & a(۲)+b(۳)\\ a(۳)+b(۱) & a(۳)+b(۲) & a(۳)+b(۳)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & a+۲b & a+۳b\\ ۲a+b & ۲a+۲b & ۲a+۳b\\ ۳a+b & ۳a+۲b & ۳a+۳b\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}-C۱+C۲\to C۲\\ = \\ -C۱+C۳\to C۳\end{matrix}\begin{bmatrix}a+b & b & ۲b\\ ۲a+b & b & ۲b\\ ۳a+b & b & ۲b\end{bmatrix}\begin{matrix}C۳=۲C۲\\ \Rightarrow\end{matrix}\ |A|=۰$$

***

www.fera.ir



**تذکر:** هر دو ماتریس مربعی مساوی ، دترمینان های مساوی[3] دارند.

$$A=B \rightarrow |A|=|B|$$

**تمرین:** اگر $B$ و $A$ دو ماتریس $۳\times ۳$ و $A$ متقارن باشد. ثابت کنیدکه: $|A+B|=|A+B^t|$

حل:

$$(A+B)^t=A^t+B^t \xrightarrow{A^t=A} (A+B)^t=A+B^t \rightarrow |(A+B)^t|=|A+B^t|$$

$$\xrightarrow{|(A+B)^t|=|A+B|} |A+B|=|A+B^t|$$

**تمرین:** اگر $A$ یک ماتریس $۳\times ۳$ و پادمتقارن باشد. ثابت کنید که: $|A|=۰$

حل:

$$A^t=-A \rightarrow |A^t|=|-A| \xrightarrow{|A^t|=|A|} |A|=|-A|$$

$$\xrightarrow{|-A|=(-۱)^۳|A|} |A|=(-۱)^۳|A| \rightarrow |A|=-|A| \rightarrow ۲|A|=۰ \rightarrow |A|=۰$$

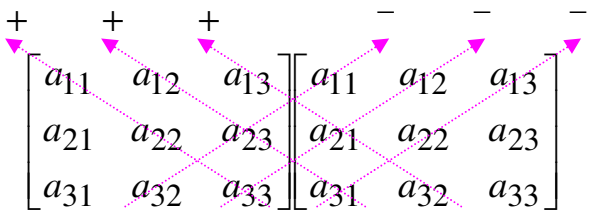
نتیجه : دترمینان هر ماتریس پادمتقارن مرتبه ی فرد برابر صفر است.

***

## دستور ساروس برای محاسبه دترمینان های ماتریس $۳\times ۳$

ابتدا ماتریس را دو بار کنار هم می نویسیم. سپس با توجه به شکل زیر حاصل ضرب های درایه های روی خط ها را محاسبه و مطابق شکل جمع و تفریق می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$




$$|A|=(a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}+a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}+a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲})-(a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲}+a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}+a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱})$$

[3] . عکس این گزاره درست نمی باشد.

www.fera.ir



**تمرین:** دترمینان ماتریس زیر را به کمک قاعده ی ساروس تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ به کمک قاعده ی ساروس نشان دهید که $|A|=۳abc-(a^۳+b^۳+c^۳)$ .

**تمرین:** به کمک قاعده ی ساروس ثابت کنید که:

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ a & ۰ & c \\ b & c & ۰ \end{vmatrix}=۲abc$$

**تمرین:** اگر $A=\begin{bmatrix} y & z & ۰ \\ x & ۰ & z \\ ۰ & x & y \end{bmatrix}$

الف : ترانهاده ی ماتریس $A$ را بنویسید. ب : ماتریس $AA^t$ را به دست آورید.

ج : مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{vmatrix}$ را تعیین کنید.

www.mathtower.org

حل :

الف :

$$A^t=\begin{bmatrix} y & x & ۰ \\ z & ۰ & x \\ ۰ & z & y \end{bmatrix}$$

ب :

www.fera.ir



$$AA^t=\begin{bmatrix} y & z & ۰ \\ x & ۰ & z \\ ۰ & x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & x & ۰ \\ z & ۰ & x \\ ۰ & z & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{bmatrix}$$

ج : ابتدا دترمینان ماتریس $A$ را به کمک قاعده ی ساروس تعیین می کنیم.

$$|A|=\begin{vmatrix} y & z & ۰ \\ x & ۰ & z \\ ۰ & x & y \end{vmatrix}\begin{matrix} y & z \\ x & ۰ \\ ۰ & x \end{matrix}=-xyz-xyz=-۲xyz$$

از طرفی با توجه به قسمت قبل داریم:

$$\begin{bmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{bmatrix}=AA^t \quad \rightarrow \begin{vmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{vmatrix}=|AA^t|$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{vmatrix}=|A||A^t|=|A||A|=|A|^۲$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} y^۲+z^۲ & xy & xz \\ xy & x^۲+z^۲ & yz \\ xz & yz & x^۲+y^۲ \end{vmatrix}=(-۲xyz)^۲=۴x^۲y^۲z^۲$$

***

تمرین : دترمینان ماتریس زیر را ابتدا به روش بسط و سپس به کمک ویژگی ها محاسبه کنید[4].

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org

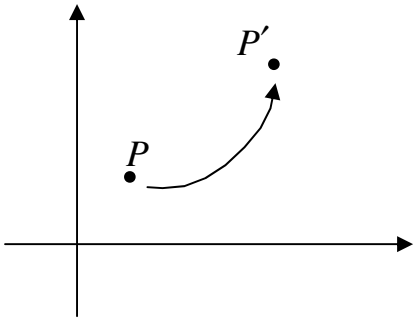
[4] . جواب ۹ می شود.

www.fera.ir



☑ **تبدیلات هندسی**

از نظر هندسی اثر یک ماتریس روی یک نقطه،آن را به یک نقطه ی دیگر تبدیل می کند.




اگر ماتریس $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را روی نقطه ی $P(x,y)$ اثر دهیم ، آنگاه

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریس $M$ نقطه ی $P(x,y)$ را به نقطه ی $P'(ax+by,cx+dy)$ تبدیل می کند.

**تمرین:** اثر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ روی $P(-۲,۱)$ نقطه ی را تعیین کنید.

حل:

$$P'=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

**تمرین:** اثر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس روی مجموعه ی نقاط درون و روی دایره ی $x^۲+y^۲\le ۱$ را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} x \\ ۲y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\to\begin{cases} x'=x \\ y'=۲y\to y=\dfrac{y'}{۲} \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲\le ۱\to x'^۲+(\frac{y'}{۲})^۲\le ۱\to x'^۲+\frac{y'^۲}{۴}\le ۱$$ نقاط درون و روی بیضی قائم

**تمرین:** ثابت کنید که دایره ی $x^۲+y^۲=۴$ تحت ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ به یک بیضی تبدیل می شود.

حل:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} ۲x \\ ۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\to\begin{cases} x'=۲x\to x=\dfrac{x'}{۲} \\ y'=۴y\to y=\dfrac{y'}{۴} \end{cases}$$

www.fera.ir



$x^۲ + y^۲ = ۴ \rightarrow (\frac{x'}{۲})^۲ + (\frac{y'}{۴})^۲ = ۴ \rightarrow \frac{x'^۲}{۴} + \frac{y'^۲}{۱۶} = ۴ \rightarrow \frac{x'^۲}{۱۶} + \frac{y'^۲}{۶۴} = ۱$ بیضی قائم

**تمرین:** تصویر خط $y = -۴x + ۱$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

تمرین : ثابت کنید که اثر ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix}$ روی بیضی به معادله ی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ یک دایره است.

***

☑ **ماتریس های تقارن**

با توجه به اینکه ماتریس می تواند یک نقطه را به نقطه ی دیگر تبدیل کند.ماتریس های زیر قرینه ی یک نقطه را نسبت به یک محور خاص تعیین می کنند.

الف) ماتریس تقارن نسبت به محور طول ها ( $y = ۰$ ) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

ب) ماتریس تقارن نسبت به محور عرض ها ( $x = ۰$ ) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

د) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم ( $y = x$ ) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

هـ) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم ( $y = -x$ ) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

**تمرین:** قرینه ی نقطه ی $P(۲,-۳)$ را نسبت به محور عرض ها بدست آورید.

www.fera.ir



**تمرین:** قرینه ی خط $۳x+۴y=۱$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم را بدست آورید.

حل:

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases} x'=-y\rightarrow y=-x' \\ y'=-x\rightarrow x=-y' \end{cases}$$

$$۳x+۴y=۱\rightarrow ۳(-y')+۴(-x')=۱\rightarrow -۳y'-۴x'=۱\rightarrow ۴x'+۳y'=-۱$$

**تمرین:** بیضی به معادله ی $\frac{(x+۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۱)^۲}{۴}=۱$ داده شده است.

الف : نوع این بیضی را تعیین کنید.

ب: قرینه ی این بیضی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بدست آورید.

ج : نوع بیضی بدست آمده را بنویسید.

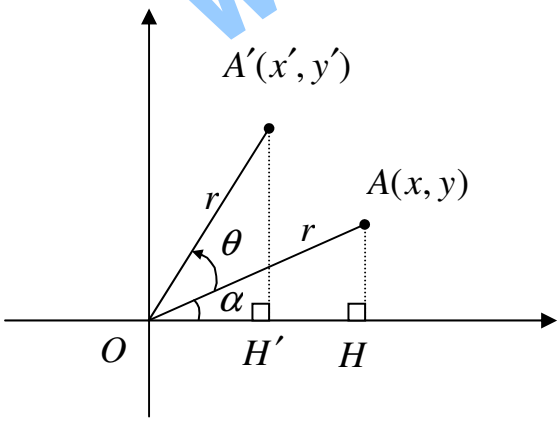
د : مختصات مرکزهای این دو بیضی را تعیین کنید.

***

☑ **ماتریس دوران**

فرض کنیم که نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به اندازه ی زاویه ثابت $\theta$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم تا نقطه ی $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ بدست آید.

در این صورت ماتریس دوران به شکل زیر می باشد.




$$\Delta OAH: Cos\alpha=\frac{x}{r}\rightarrow x=rCos\alpha$$

$$\Delta OAH: Sin\alpha=\frac{y}{r}\rightarrow y=rSin\alpha$$

$$\Delta OA'H': Cos(\alpha+\theta)=\frac{x'}{r}\rightarrow x'=rCos(\alpha+\theta)$$

$$\rightarrow x'=rCos\alpha Cos\theta-rSin\alpha Sin\theta=xCos\theta-ySin\theta$$

www.mathtower.org

www.fera.ir



$$\Delta OA'H' : Sin(\alpha+\theta)=\frac{y'}{r}\rightarrow y'=rSin(\alpha+\theta)$$

$$\rightarrow y'=rSin\alpha Cos\theta+rCos\alpha Sin\theta=yCos\theta+xSin\theta=xSin\theta+yCos\theta$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Cos\theta & -Sin\theta\\Sin\theta & Cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix}Cos\theta & -Sin\theta\\Sin\theta & Cos\theta\end{bmatrix}$ را ماتریس دوران می گویند و آنرا با $R_\theta$ نمایش می دهند.

**تمرین:** تبدیل یافته ی نقطه ی $(-۴,۲)$تحت دوران به اندازه ی $\theta=\frac{\pi}{۴}$ را بدست آورید.

حل:

$$R_{\frac{\pi}{۴}}=\begin{bmatrix}Cos\frac{\pi}{۴} & -Sin\frac{\pi}{۴}\\Sin\frac{\pi}{۴} & Cos\frac{\pi}{۴}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۴)+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(۲)\\\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۴)+\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\sqrt{۲}\\-\sqrt{۲}\end{bmatrix}$$

**تمرین:** اگر $R$ ماتریس دوران باشد. ثابت کنید که $R_\alpha . R_\beta = R_{\alpha+\beta}$

**تمرین:** برای زاویه ی ثابت داده شده ی $\theta$ و عدد طبیعی $n$، ثابت کنید: $R_\theta^n = R_{n\theta}$

حل: کافی است که ثابت کنیم:

$$\begin{bmatrix}Cos\theta & -Sin\theta\\Sin\theta & Cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}Cos(n\theta) & -Sin(n\theta)\\Sin(n\theta) & Cos(n\theta)\end{bmatrix}$$

این تساوی را به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت می کنیم.

$$p(n): R_\theta^n = R_{n\theta}\rightarrow\begin{bmatrix}Cos\theta & -Sin\theta\\Sin\theta & Cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}Cos(n\theta) & -Sin(n\theta)\\Sin(n\theta) & Cos(n\theta)\end{bmatrix}$$

$$p(۱): R_\theta^۱ = R_{۱\theta}\rightarrow\begin{bmatrix}Cos\theta & -Sin\theta\\Sin\theta & Cos\theta\end{bmatrix}^۱=\begin{bmatrix}Cos(۱\theta) & -Sin(۱\theta)\\Sin(۱\theta) & Cos(۱\theta)\end{bmatrix}$$

$p(۱)$ درست است.

$p(k): R_\theta^k = R_{k\theta}$ فرض استقرا

$p(k+۱): R_\theta^{k+۱} = R_{(k+۱)\theta}$ حکم استقرا

www.fera.ir



طرف اول حکم استقرا

$$R_\theta^{k+1} = R_\theta^k . R_\theta = R_{k\theta} . R_\theta = R_{k\theta+\theta} = R_{(k+1)\theta}$$

**تمرین:** با استفاده از دوران مناسب حاصل $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{47}$ را بیابید.

**تمرین:** با استفاده از دوران مناسب حاصل $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{13}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{13} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 2 \end{bmatrix}^{13} = 2^{13}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{13} = 2^{13}\begin{bmatrix} Cos\frac{\pi}{3} & -Sin\frac{\pi}{3} \\ Sin\frac{\pi}{3} & Cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^{13}$$

$$= 2^{13}\begin{bmatrix} Cos\frac{13\pi}{3} & -Sin\frac{13\pi}{3} \\ Sin\frac{13\pi}{3} & Cos\frac{13\pi}{3} \end{bmatrix} = 2^{13}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2^{12}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

توجه:

$$Sin\frac{13\pi}{3} = Sin(4\pi + \frac{\pi}{3}) = Sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cos\frac{13\pi}{3} = Cos(4\pi + \frac{\pi}{3}) = Cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

**تمرین:** با استفاده از دوران مناسب حاصل $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{100}$ را بیابید.

راهنمایی: تمام درایه ها را در $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضرب کنید.

***



www.mathtower.org

www.fera.ir



☑ **حل مسائل هندسه ی تحلیلی به کمک جبر خطی**

در این قسمت به چند مسئله ی هندسه ی تحلیلی که به کمک جبر خطی قابل توجیه هستند، اشاره می کنیم.

**۱ : نمایش معادله ی یک خط توسط دترمینان**

معادله ی خطی که از دو نقطه ی $A(a,b)$ و $B(c,d)$ می گذرد، عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

اثبات : در ابتدا دترمینان داده شده را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می دهیم.

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} \overset{\substack{-R۳+R۱\to R۱ \\ -R۳+R۲\to R۲}}{=} \begin{vmatrix} x-c & y-d & ۰ \\ a-c & b-d & ۰ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} x-c & y-d \\ a-c & b-d \end{vmatrix} = (x-c)(b-d)-(a-c)(y-d) = ۰$$

$$(x-c)(b-d)-(a-c)(y-d) = ۰ \to (x-c)(b-d) = (a-c)(y-d) \to \frac{y-d}{x-c} = \frac{b-d}{a-c}$$

تمرین : معادله ی خط گذرا از دو نقطه ی $A(۲,۴)$ و $B(۳,۵)$ را بنویسید.

حل :

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \to \begin{vmatrix} x-۳ & y-۵ & ۰ \\ ۲-۳ & ۴-۵ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \to \begin{vmatrix} x-۳ & y-۵ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \to ۱(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} x-۳ & y-۵ \\ -۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\to (-۱)(x-۳)-(-۱)(y-۵) = ۰ \to ۳-x+y-۵ = ۰ \to -x+y-۲ = ۰$$

***

www.fera.ir

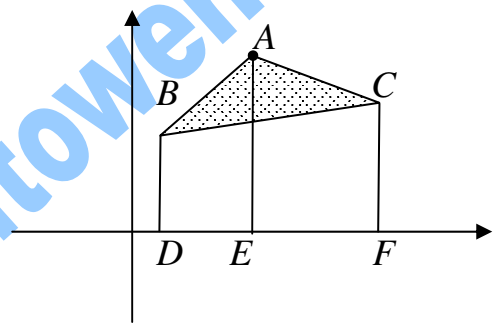


**۲: نمایش مساحت یک مثلث توسط دترمینان**

اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ رأس های یک مثلث باشند. مساحت مثلث $ABC$ با قدر مطلق دترمینان زیر برابر است.

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

اثبات : با توجه به شکل زیر واضح است که می توان مساحت مثلث $ABC$ را به کمک ذوزنقه های ایجاد شده محاسبه کرد. نـشان می دهیم که این مساحت با قدرمطلق دترمینان داده شده برابر است.




$$S_{\Delta ABC} = |S_{ABDE} + S_{AEFC} - S_{BDFC}|$$

$$= |\frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)(x_۱ - x_۲) + \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۳)(x_۳ - x_۱) - \frac{۱}{۲}(y_۳ + y_۲)(x_۳ - x_۲)|$$

$$= \frac{۱}{۲}|x_۱y_۱ + x_۱y_۲ - x_۲y_۱ - x_۲y_۲ + x_۳y_۱ + x_۳y_۳ - x_۱y_۱ - x_۱y_۳ - x_۳y_۳ - x_۳y_۲ + x_۲y_۳ + x_۲y_۲|$$

$$= \frac{۱}{۲}|x_۱y_۲ - x_۲y_۱ + x_۳y_۱ - x_۱y_۳ - x_۳y_۲ + x_۲y_۳|$$

حال دترمینان داده شده را محاسبه می کنیم.

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix} \underset{-R۱+R۳\to R۳}{\overset{-R۱+R۲\to R۲}{=}} \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ - x_۱ & y_۲ - y_۱ & ۰ \\ x_۳ - x_۱ & y_۳ - y_۱ & ۰ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}(۱)(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} x_۲ - x_۱ & y_۲ - y_۱ \\ x_۳ - x_۱ & y_۳ - y_۱ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۲}((x_۲ - x_۱)(y_۳ - y_۱) - (x_۳ - x_۱)(y_۲ - y_۱))$$

$$= \frac{۱}{۲}(x_۲y_۳ - x_۲y_۱ - x_۱y_۳ + x_۱y_۱ - x_۳y_۲ + x_۳y_۱ + x_۱y_۲ - x_۱y_۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}(x_۲y_۳ - x_۲y_۱ - x_۱y_۳ - x_۳y_۲ + x_۳y_۱ + x_۱y_۲)$$

بدیهی است که دو مقدار به دست آمده دارای قدر مطلق های برابر می باشند.

www.mathtower.org

www.fera.ir



تمرین : اگر $A(-1,2)$ و $B(-3,-1)$ و $C(3,2)$ سه رأس مثلث $ABC$ باشند، مساحت مثلث را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

حل :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{-R1+R3\to R3}{\overset{-R1+R2\to R2}{=}} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{R1\leftrightarrow R3}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(4)(-3)(1) = 6$$

***

**۳: نمایش ضرب خارجی دو بردار توسط دترمینان**

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در فضای سه بعدی باشند. ضرب خارجی این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

اثبات : کافی است دترمینان داده شده را به کمک بسط نسبت به سطر اول تعیین کنید.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + j(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b1 & b_2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b1 & b_2 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

تمرین : اگر $\vec{a} = (-1,2,3)$ و $\vec{b} = (3,1,2)$ بردار های $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{b} \times \vec{a}$ و $\vec{a} \times \vec{a}$ را محاسبه کنید.

نتیجه ۱: اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ سه بردار در فضای سه بعدی باشند. در این صورت

www.fera.ir



$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

اثبات : کافی است دترمینان داده شده را نسبت به سطر اول بسط داده شود.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & b_3 \end{vmatrix}+a_3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & b_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & b_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

نتیجه ۲ : اگر $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$ سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ روی یک صفحه واقعند.

***

**۴ : نمایش معادله ی یک صفحه توسط دترمینان**

معادله ی صفحه ای که از سه نقطه ی $A(a_1,b_1,c_1)$ و $B(a_2,b_2,c_2)$ و $C(a_3,b_3,c_3)$ می گذرد، عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0$$

اثبات :

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a_1)\begin{vmatrix} b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}-(y-b_1)\begin{vmatrix} a_2-a_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}+(z-c_1)\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a_1)\begin{vmatrix} b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}+(y-b_1)\begin{vmatrix} c_2-c_1 & a_2-a_1 \\ c_3-c_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix}+(z-c_1)\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a_1)(a)+(y-b_1)(b)+(z-c_1)(c)=a(x-a_1)+b(y-b_1)+c(z-c_1)=0$$

تمرین: معادله ی صفحه گذرا از نقاط $A(1,2,3)$ و $B(2,1,2)$ و $C(3,3,1)$ را بنویسید.

www.mathtower.org

www.fera.ir

# آموزش

## هندسه ی تحلیلی و جبر خطی

دوره ی پیش دانشگاهی رشته ی ریاضی

فصل پنجم : دستگاه معادلات

تهیه کننده: جابر عامری

**دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

**www.mathtower.org**

مهر ۱۳۸۹

www.fera.ir



**باسمه تعالی**

## فصل پنجم: معکوس ماتریس – دستگاه معادلات خطی

### ماتریس های معکوس پذیر

دو ماتریس مربعی را معکوس (وارون) همدیگر گویند، هرگاه حاصل ضرب آنها ماتریس واحد باشد.

$$AB = BA = I$$

**تمرین:** نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

**تمرین:** نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \end{bmatrix}$ است.

**قضیه:** وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است.

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که ماتریس مربعی و معکوس پذیر $A$ دارای دو وارون $C$ و $B$ است. ثابت می کنیم که

$$B = C$$

$B$ وارون $A$ است. $\Rightarrow AB = BA = I$

$C$ وارون $A$ است. $\Rightarrow AC = CA = I$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

**تذکر:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد.در این صورت وارون آن را به شکل $A^{-۱}$ نمایش می دهند.

www.fera.ir



**ماتریس الحاقی**

ترانهاده ی ماتریس همسازه ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند و آنرا با $A^*$ نمایش می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow N=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^*=N^t=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

**تمرین:** ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\,|M_{11}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\,|M_{12}|=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-6$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\,|M_{13}|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\,|M_{21}|=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\,|M_{22}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=3 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\,|M_{23}|=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\,|M_{31}|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\,|M_{32}|=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\,|M_{33}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2$$

$$\Rightarrow A^*=N^t=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

www.mathtower.org

www.fera.ir



**تمرین:** ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\,|M_{11}|=d \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\,|M_{12}|=-c$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\,|M_{21}|=-b \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\,|M_{22}|=a$$

$$\Rightarrow A^{*}=N^{t}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**نتیجه:**

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی $2\times 2$ از تعویض درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

**قضیه:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد. آنگاه $AA^{*}=A^{*}A=|A|.I$

اثبات لازم نیست.

تمرین : اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

الف : دترمینان ماتریس $A$ را محاسبه کنید.

ب : نشان دهید که $AA^{*}=|A|.I$

**نتیجه:** برای هر ماتریس مربعی مانند $A$ همواره داریم: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}$

اثبات:

$$AA^{*}=|A|.I \rightarrow A^{-1}(AA^{*})=|A|(A^{-1}I) \rightarrow (A^{-1}A)A^{*}=|A|A^{-1}$$

$$\rightarrow IA^{*}=|A|A^{-1} \rightarrow A^{*}=|A|A^{-1} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}$$

www.fera.ir



**قضیه:** اگر یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد،آنگاه دترمینان آن مخالف صفر است.

اثبات: گیریم که $A$ یک ماتریس مربعی وارون پذیر و $A$ وارون آن باشد. پس:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \rightarrow |AA^{-1}| = |I| \rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \rightarrow |A| \neq 0 \quad , \quad |A^{-1}| \neq 0$$

**نتیجه:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد. در این صورت:

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{ و } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

**تمرین:** اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A$ را تعیین کنید.

حل:

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{(2)(6)-(3)(-7)} = \frac{1}{33}$$

**قضیه:** اگر دترمینان یک ماتریس مربعی مخالف صفر باشد. آنگاه آن ماتریس معکوس پذیر است.

اثبات: اگر $A \neq 0$ در این صورت: $AA^{*} = |A| I \rightarrow A(\frac{1}{|A|}A^{*}) = I$

یعنی $A$ وارون پذیر است و وارون آن برابر $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}$

**تمرین:** معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ب) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

جواب:

الف:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 20 - 21 = -1 \neq 0$ لذا ماتریس $A$ معکوس پذیر است.

www.mathtower.org

www.fera.ir



$$A^* = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times A^* = \frac{۱}{-۱} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۷ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |B| = ۹ \neq ۰$$

لذا ماتریس $B$ معکوس پذیر است.

حل:

$$B_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} |M_{۱۱}| = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۱ \qquad B_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} |M_{۱۲}| = -\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = -۶$$

$$B_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳} |M_{۱۳}| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲ \qquad B_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱} |M_{۲۱}| = -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۴$$

$$B_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} |M_{۲۲}| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۳ \qquad B_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳} |M_{۲۳}| = -\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱$$

$$B_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱} |M_{۳۱}| = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = ۱ \qquad B_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} |M_{۳۲}| = -\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} = ۳$$

$$B_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳} |M_{۳۳}| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۲$$

$$\Rightarrow B^* = N^t = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱} = \frac{۱}{|B|} \times B^* = \frac{۱}{۹} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \end{bmatrix}$$

www.fera.ir



**تمرین:** اگر $B$ و $A$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه و معکوس پذیر باشند.ثابت کنید که:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

حل: چون ماتریس های $B$ و $A$ وارون پذیر هستند، لذا $|B| \neq 0$ و $|A| \neq 0$ . حال چون $|AB| = |A||B|$ پس $|AB| \neq 0$ .

یعنی ماتریس $AB$ وارون پذیر است. از طرفی

$$\begin{cases} (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BIB^{-1} = (BI)B^{-1} = BB^{-1} = I \end{cases}$$

$$\rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**تمرین:** اگر $A$ یک ماتریس مربعی وارون پذیر و $r$ یک عدد حقیقی غیر صفر باشد.آنگاه

الف) ماتریس $A^t$ نیز معکوس پذیر است و $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

ب) ماتریس $rA$ نیز معکوس پذیر است و $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$

حل:

الف) چون ماتریس $A$ وارون پذیر است، لذا $|A| \neq 0$ . حال چون $|A| = |A^t|$ پس $|A^t| \neq 0$ . یعنی ماتریس $A^t$ وارون پذیر است. از طرفی

$$AA^{-1} = I \rightarrow (AA^{-1})^t = I^t \rightarrow (A^{-1})^t A^t = I \rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

ب) چون ماتریس $A$ وارون پذیر است، لذا $|A| \neq 0$ . حال چون $|rA| = r^n |A|$ پس $|rA| \neq 0$ . یعنی ماتریس $rA$ وارون پذیر است. از طرفی

$$(rA)^{-1} = A^{-1}r^{-1} = A^{-1} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r}A^{-1}$$

**تمرین:** برای هر ماتریس مربعی $A$ با مرتبه ی $n \times n$ ثابت کنید که $|A^*| = |A|^{n-1}$

حل:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* \rightarrow |A^{-1}| = |\frac{1}{|A|} \times A^*| \rightarrow \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^n} \times |A^*| \rightarrow \frac{|A|^n}{|A|} = |A^*| \rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

www.fera.ir



**تمرین :** دترمینان ماتریس الحاقی ، ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

**حل :**

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}\rightarrow |A|=۹\neq ۰$$

$$|A^{*}|=|A|^{n-۱}=(۹)^{۳-۱}=۸۱$$

**تمرین:** ثابت کنید که ماتریس دوران $R_\theta$ وارون پذیر است و $(R_\theta)^{-۱}=R_{(-\theta)}$

حل:

$$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\rightarrow |R_\theta|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta=۱\neq ۰$$

لذا ماتریس $R_\theta$ معکوس پذیر است. از طرفی:

$$(R_\theta)^{-۱}=\frac{۱}{|R_\theta|}R^{*}\theta=۱\times\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=R_{(-\theta)}$$

***

**تمرین:** اگر $A$ و $B$ ماتریس های مربعی هم مرتبه باشند، به قسمی که $A+B=AB$ . ثابت کنید که با فرض وارون پذیری $A$ ماتریس $B$ نیز وارون پذیر است. و داریم $A^{-۱}+B^{-۱}=I$

حل: چون ماتریس $A$ وارون پذیر است. داریم:

$$A+B=AB\xrightarrow{\times A^{-۱}}A^{-۱}(A+B)=A^{-۱}(AB)\rightarrow A^{-۱}A+A^{-۱}B=(A^{-۱}A)B$$

$$\rightarrow I+A^{-۱}B=IB\rightarrow I=IB-A^{-۱}B\rightarrow I=(I-A^{-۱})B\rightarrow B^{-۱}=I-A^{-۱}\rightarrow A^{-۱}+B^{-۱}=I$$

***



www.mathtower.org

www.fera.ir



**باسمه تعالی**

## فصل پنجم: دستگاه معادلات خطی

### دستگاه دو معادله ی دو مجهولی

هر دستگاه به شکل $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ را دستگاه دو معادله ی دو مجهولی می نامند که می توان آنرا به شکل زیر نیز نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{D}$$

ماتریس $A$ را ماتریس ضرایب و ماتریس $X$ را ماتریس مجهولات و ماتریس $D$ را ماتریس معلومات می نامند. از طرفی بدیهی است که

$$AX=D \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}D \rightarrow IX=A^{-1}D \rightarrow X=A^{-1}D$$

**نتیجه:** شرط اینکه دستگاه جواب داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر نباشد. یعنی: $|A|\neq 0$

***

### روش های حل دستگاه های دو معادله ی دو مجهولی

### روش اول: روش ماتریس معکوس

در این روش دستگاه را به شکل $X=A^{-1}D$ تبدیل می کنیم و در صورت وجود جواب مقدار مجهولات آنرا تعیین می کنیم.

**تمرین:** دستگاه های زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=-2 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} -2x+y=5 \\ 4x-2y=3 \end{cases}$

حل:

الف:

$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A|=-2-1=-3\neq 0$ لذا دستگاه جواب دارد.

www.fera.ir



$$\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}=\frac{1}{-3}\times\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}D\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$$

ب:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\rightarrow|A|=4-4=0$$

لذا دستگاه جواب ندارد.

.....

## روش دوم: روش کرامر

اگر $A$ ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی باشد. می توان آنرا به روش زیر حل کرد. این روش را روش کرامر می نامند.

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}\qquad \text{و}\qquad y=\frac{|A_2|}{|A|}$$

که $A_1$ از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون اول ماتریس ضرایب و $A_2$ از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون دوم ماتریس ضرایب بدست می آیند.

**تمرین:** دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases}2x+y=5\\ x-y=-2\end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow|A|=-2-1=-3\neq 0$$

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-5+2}{-2-1}=1\qquad \text{و}\qquad y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-4-5}{-2-1}=3$$

www.mathtower.org

www.fera.ir



## روش سوم: روش گاوس

فرض کنیم که $AX = D$ یک دستگاه معادلات باشد. ماتریس $[A \mid D]$ را ماتریس افزوده می گویند. اگر روی ماتریس افزوده ی یک دستگاه اعمال زیر که به اعمال سطری مقدماتی معروف هستند، را انجام دهیم جوابها ی دستگاه تغییر نمی کنند.

۱) ضرب کردن یک معادله در یک عدد حقیقی ناصفر

۲) اضافه کردن یک معادله یا مضربی از آن به طرفین معادله ی دیگر

۳) تعویض جای دو معادله

برای حل دستگاه باید اعمال فوق را روی سطرهای ماتریس افزوده ی یک دستگاه انجام دهیم تا ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی تبدیل شود.

**تمرین:** دستگاه زیر را به روش گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x + y = ۵ \\ x - y = -۲ \end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد. $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -۲ - ۱ = -۳ \neq ۰$

$$[A \mid D] = \left[\begin{array}{cc|c} ۲ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۱ & -۲ \end{array}\right] \xrightarrow{R۱ \leftrightarrow R۲} \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{array}\right] \xrightarrow{-۲R۱ + R۲ \rightarrow R۲} \left[\begin{array}{cc|c} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۹ \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = -۲ \\ ۳y = ۹ \rightarrow y = ۳ \end{cases} \rightarrow x = ۱$$

.....

## روش چهارم: روش گاوس - جردن

در این روش با استفاده از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده ی دستگاه یعنی $[A \mid D]$ ماتریس $A$ را به یک ماتریس همانی تبدیل می کنیم.

**تمرین:** دستگاه زیر را به روش گاوس – جردن حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x + y = ۵ \\ x - y = -۲ \end{cases}$$

www.fera.ir



حل: لذا دستگاه جواب دارد. $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-۲-۱=-۳\neq ۰$

$$[A\,|\,D]=\left[\begin{array}{cc|c}۲ & ۱ & ۵\\ ۱ & -۱ & -۲\end{array}\right]\xrightarrow{R۱\leftrightarrow R۲}\left[\begin{array}{cc|c}۱ & -۱ & -۲\\ ۲ & ۱ & ۵\end{array}\right]\xrightarrow{-۲R۱+R۲\rightarrow R۲}\left[\begin{array}{cc|c}۱ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۳ & ۹\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R۲}{۳}\rightarrow R۲}\left[\begin{array}{cc|c}۱ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۳\end{array}\right]\xrightarrow{R۲+R۱\rightarrow R۱}\left[\begin{array}{cc|c}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۳\end{cases}$$

.....

تمرین: دستگاه زیر را به روش های فوق حل کنید.

$$\begin{cases}۳x+y=-۲\\ x-y=-۲\end{cases}$$

www.fera.ir



**دستگاه سه معادله ی سه مجهولی**

هر دستگاه به شکل $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$

را دستگاه سه معادله ی سه مجهولی می نامند که می توان آنرا به شکل زیر نیز نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}}_{D}$$

ماتریس $A$ را ماتریس ضرایب و ماتریس $X$ را ماتریس مجهولات و ماتریس $D$ را ماتریس معلومات می نامند.از طرفی بدیهی است که

$$AX=D \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}D \rightarrow IX=A^{-1}D \rightarrow X=A^{-1}D$$

**نتیجه:** شرط اینکه دستگاه جواب داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر نباشد. یعنی: $|A|\neq 0$

## روش های حل دستگاه های سه معادله ی سه مجهولی

### روش اول: روش ماتریس معکوس

در این روش دستگاه را به شکل $X=A^{-1}D$ تبدیل می کنیم و در صورت وجود جواب مقدار مجهولات آنرا تعیین می کنیم.

**تمرین:** دستگاه های زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

حل:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A|=6\neq 0$$

لذا دستگاه جواب دارد.

www.mathtower.org

www.fera.ir



$$A_{11}=(-1)^{1+1}\,|M_{11}|=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\,|M_{12}|=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\,|M_{13}|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\,|M_{21}|=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\,|M_{22}|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\,|M_{23}|=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\,|M_{31}|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\,|M_{32}|=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\,|M_{33}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$\Rightarrow A^{*}=N^{t}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}=\frac{1}{6}\times\begin{bmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}D\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$$

.....

www.fera.ir



## روش دوم: روش کرامر

اگر $A$ ماتریس ضرایب یک دستگاه سه معادله و سه مجهولی باشد. می توان آنرا بـه روش زیـر حـل کـرد. ایـن روش را روش کرامـر می نامند.

$$x=\frac{|A_۱|}{|A|} \quad \text{و} \quad y=\frac{|A_۲|}{|A|} \quad \text{و} \quad z=\frac{|A_۳|}{|A|}$$

که $A_j$ ( $j=۱,۲,۳$ ) از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون $j$ ام ماتریس $A$ بدست می آید.

**تمرین:** دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=۰ \\ ۲x-۳y+z=۱ \\ -x+y-۳z=۲ \end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد. $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=۱۲\neq ۰$

$$x=\frac{|A_۱|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۳ \end{vmatrix}}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$$

$$y=\frac{|A_۲|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & -۳ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۳ \end{vmatrix}}=\frac{۰}{۱۲}=۰$$

www.fera.ir



$$z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -3\end{vmatrix}}=\frac{-12}{12}=-1$$

.....

**روش سوم: روش گاوس**

فرض کنیم که $AX=D$ یک دستگاه معادلات باشد. ماتریس $[A\,|\,D]$ را ماتریس افزوده می گویند. اگر روی ماتریس افزوده ی یک دستگاه اعمال زیر که به **اعمال سطری مقدماتی** معروف هستند، را انجام دهیم جوابها ی دستگاه تغییر نمی کنند.

۱) ضرب کردن یک معادله در یک عدد حقیقی ناصفر

۲) اضافه کردن یک معادله یا مضربی از آن به طرفین معادله ی دیگر

۳) تعویض جای دو معادله

برای حل دستگاه باید اعمال فوق را روی سطرهای ماتریس افزوده ی یک دستگاه انجام دهیم تا ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی یا پایین مثلثی تبدیل شود.

**تمرین:** دستگاه زیر را به روش گاوس حل کنید.

$$\begin{cases}x+y-z=-4\\ 2x-y+z=1\\ x+2y-z=-5\end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-3\neq 0$

www.mathtower.org

www.fera.ir



$$[A|D]=\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۱ & -۱ & -۴\\ ۲ & -۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۱ & -۵\end{array}\right]\xrightarrow{R۲+R۱\to R۱}\left[\begin{array}{ccc|c}۳ & ۰ & ۰ & -۳\\ ۲ & -۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۱ & -۵\end{array}\right]\xrightarrow{R۳+R۲\to R۲}\left[\begin{array}{ccc|c}۳ & ۰ & ۰ & -۳\\ ۳ & ۱ & ۰ & -۴\\ ۱ & ۲ & -۱ & -۵\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x=-۳\to x=-۱\\ ۳x+y=-۴\xrightarrow{x=-۱}y=-۱\\ x+۲y-z=-۵\xrightarrow{x=-۱\ ,\ y=-۱}z=۲\end{cases}$$

.....

## روش چهارم: روش گاوس - جردن

در این روش با استفاده از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده ی دستگاه یعنی $[A|D]$ ماتریس $A$ را به یک ماتریس همانی تبدیل می کنیم.

**تمرین:** دستگاه زیر را به روش گاوس – جردن حل کنید.

$$\begin{cases}x+۲y+۳z=۹\\ ۴x+۵y+۶z=۲۴\\ ۳x+y-۲z=۴\end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد. $A=\left[\begin{array}{ccc}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۳ & -۲ & -۲\end{array}\right]\to|A|=-۱۵\neq۰$

$$[A|D]=\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۲ & ۳ & ۹\\ ۴ & ۵ & ۶ & ۲۴\\ ۳ & -۲ & -۲ & ۴\end{array}\right]\begin{array}{c}-۴R۱+R۲\to R۲\\ \to\\ -۳R۱+R۳\to R۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۲ & ۳ & ۹\\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲\\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳\end{array}\right]\begin{array}{c}\frac{۲}{۳}R۲+R۱\to R۱\\ \to\\ -\frac{۵}{۳}R۲+R۳\to R۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲\\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}-R۳+R۱\to R۱\\ \to\\ -۶R۳+R۲\to R۲\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & -۳ & ۰ & ۶\\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳\end{array}\right]\begin{array}{c}-\frac{۲}{۳}R۲\to R۲\\ \to\\ -R۳\to R۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & ۰ & ۴\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=۴\\ y=-۲\\ z=۳\end{cases}$$

.....

www.fera.ir



**تمرین:** دستگاه های زیر را به روش گاوس – جردن حل کنید.

الف) $\begin{cases} x+y+z=۰ \\ ۲x-۳y+z=۱ \\ -x+y-۳z=۲ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+y+z=۲ \\ y-۳z=۱ \\ x-y+z=۰ \end{cases}$

www.fera.ir



**روشی دیگر برای تعیین معکوس یک ماتریس مربعی**

اگر ماتریس مربعی $A$ معکوس پذیر باشد.آنرا در کنار ماتریس واحد هم مرتبه ی آن قرار می دهیم، سپس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی ماتریس داده شده را به ماتریس واحد تبدیل می کنیم.در صورتی که همین اعمال را به طور همزمان روی ماتریس واحد انجام شوند، حاصل معکوس ماتریس اصلی خواهد بود.

$$[A\,|\,I] \xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}} [I\,|\,A^{-1}]$$

**تمرین:** معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل:

لذا ماتریس معکوس پذیر است. $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۴-۳ = ۱ \neq ۰$

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{cc|cc} ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{R۱ \leftrightarrow R۲} \left[\begin{array}{cc|cc} ۳ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow{-۲R۲+R۱ \rightarrow R۱} \left[\begin{array}{cc|cc} -۱ & ۰ & -۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R۱ \rightarrow R۱} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right] \xrightarrow{-۲R۱+R۲ \rightarrow R۲} \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۲ \end{array}\right] = [I\,|\,A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

**تمرین:** معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل:

لذا ماتریس معکوس پذیر است. $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۳ \neq ۰$

www.fera.ir



$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۲&۳&۱&۰&۰\\۴&۵&۶&۰&۱&۰\\۳&۱&-۲&۰&۰&۱\end{array}\right]\begin{array}{c}-۴R۱+R۲\to R۲\\\to\\-۳R۱+R۳\to R۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۲&۳&۱&۰&۰\\۰&-۳&-۶&-۴&۱&۰\\۰&-۵&-۱۱&-۳&۰&۱\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}-\frac{۲}{۳}R۲+R۱\to R۱\\\to\\-\frac{۵}{۳}R۲+R۳\to R۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&-۱&\frac{۱۱}{۳}&-\frac{۲}{۳}&۰\\۰&-۳&-۶&-۴&۱&۰\\۰&۰&-۱&\frac{۱۱}{۳}&-\frac{۵}{۳}&۱\end{array}\right]\begin{array}{c}-R۳+R۱\to R۱\\\to\\-۶R۳+R۲\to R۲\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۰&۰&-۱&-۱\\۰&-۳&۰&۱۸&۱۱&-۶\\۰&۰&-۱&\frac{۱۱}{۳}&-\frac{۵}{۳}&۱\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}-\frac{۱}{۳}R۲\to R۲\\\to\\-R۳\to R۳\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}۱&۰&۰&۰&-۱&-۱\\۰&۱&۰&-۶&-\frac{۱۱}{۳}&۲\\۰&۰&۱&-\frac{۱۱}{۳}&\frac{۵}{۳}&-۱\end{array}\right]=[I\,|\,A^{-۱}]\Rightarrow A^{-۱}=\left[\begin{array}{ccc}۰&-۱&-۱\\-۶&-\frac{۱۱}{۳}&۲\\-\frac{۱۱}{۳}&\frac{۵}{۳}&-۱\end{array}\right]$$

***

**موفق باشید.**

## جابرعامری

## دبیر دبیرستان های شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.org